Planimetrie – úvod, základní pojmy (teorie)

Geometrie (původně zeměměřictví) – nyní část matematiky, zabývající se studiem geometrických objektů

Planimetrie – rovinná geometrie
Stereometrie – prostorová geometrie

Abstrakcí z hmotných objektů vznikly základní geometrické pojmy – **bod**
- **přímka**

Bod

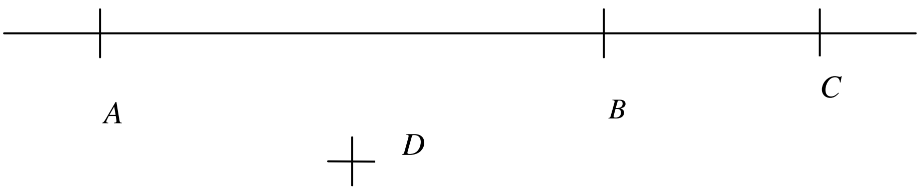
- označujeme velkými písmeny A, B, T,…..
- zakreslujeme křížkem (průsečík dvou čar)
- pokud bod A splývá s bodem B, zapíšeme A=B
- pokud bod A je různý od bodu B, zapíšeme $A \neq B$

Přímka

Věta: Dvěma různými body prochází jediná přímka.

přímka p určená body $A \neq B$ zapíšeme $p = \leftrightarrow AB$
pokud bod C leží na přímce p, zapíšeme $C \in p$
pokud bod D neleží na přímce p, zapíšeme $D \notin p$

obrázek:



Polopřímka

Bod P, ležící na přímce p, ji rozděluje na dvě navzájem **opačné polopřímky** a je jejich společným **počátkem**. Každý jiný bod přímky p je **vnitřním bodem** právě jedné z obou polopřímek.

polopřímku s počátkem v bodě P a vnitřním bodem A zapíšeme $\mapsto PA$

obrázek:

Úsečka
Úsečku AB tvoří všechny body přímky AB, které leží mezi body A, B a body A, B.
Body A, B nazýváme **krajní body,** ostatní jsou **vnitřní body**.
Úsečku AB můžeme tedy definovat jako průnik polopřímek AB a BA.
$AB = \mapsto AB \cap \mapsto BA$

obrázek:

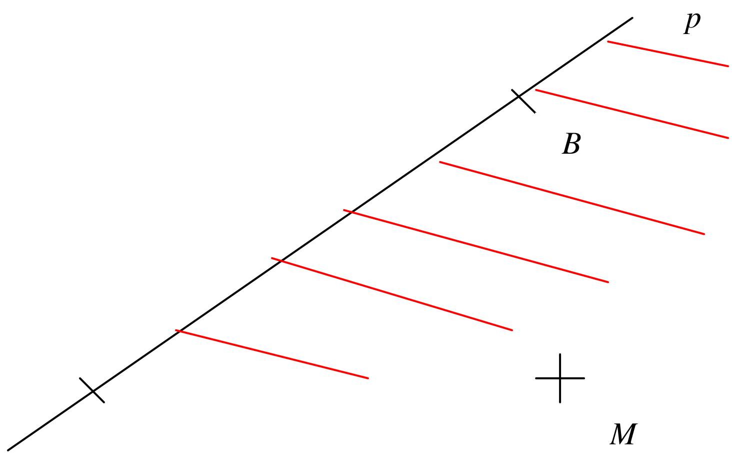
velikost úsečky (délka úsečky, vzdálenost bodů A, B) se označuje $|AB|$

Polorovina

Přímka p rozděluje rovinu α na dvě navzájem **opačné poloroviny** a je jejich společnou **hraniční přímkou**.
Hraniční přímka p patří do obou polorovin.
Každý bod roviny, který neleží na hraniční přímce, je prvkem právě jedné poloroviny.

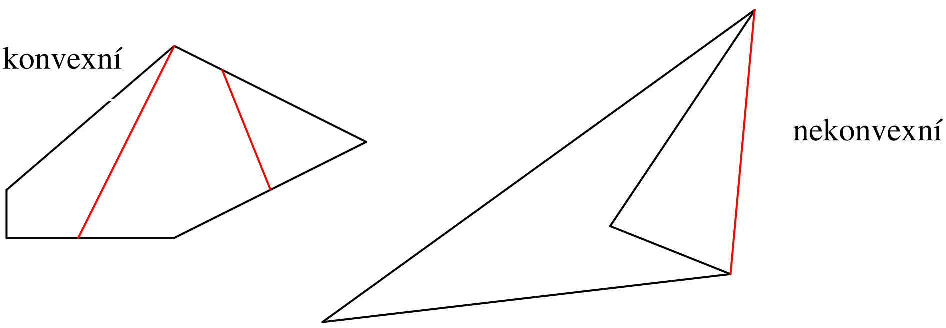
polorovinu s hraniční přímkou p a vnitřním bodem M zapíšeme $\mapsto pM$
pokud hraniční přímka $p = \leftrightarrow AB$ lze zapsat tuto polorovinu $\mapsto ABM$

obrázek :



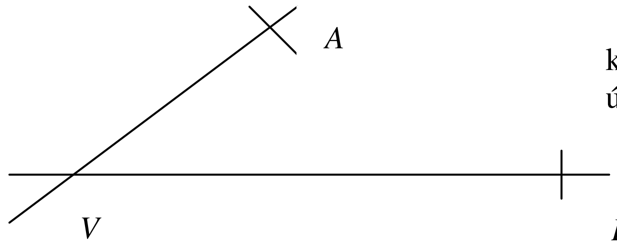
Poznámka
Geometrický útvar se nazývá **konvexní**, jestliže úsečka, spojující jeho dva libovolné body, je částí tohoto útvaru.

obrázek:



Úhel AVB definujeme jako průnik polorovin $\mapsto AVB$ a $\mapsto BVA$.
- bod V nazýváme **vrchol úhlu**
- polopřímky $\mapsto VA$ a $\mapsto VB$ nazýváme **ramena úhlu**
- pro označení často používáme písmena řecké abecedy α, β apod.

obrázek:



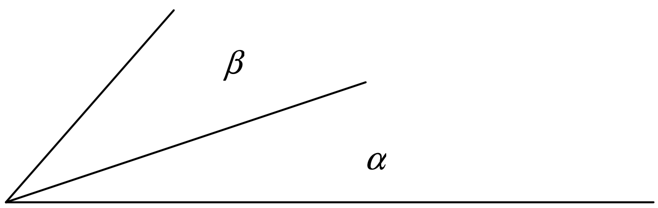
konvexní úhel AVB

úhel, který vznikne sjednocením polorovin opačných k polorovinám $\mapsto AVB$ a $\mapsto BVA$, se nazývá **nekonvexní úhel** AVB

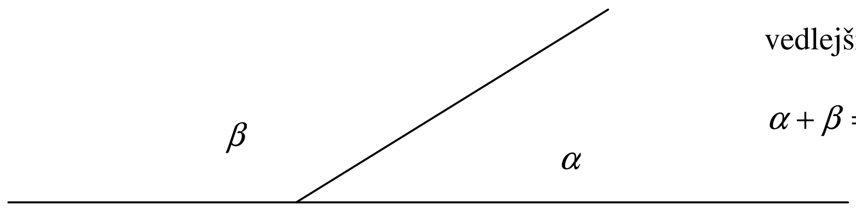
Vztahy mezi úhly

Konvexní úhly **podle velikosti**:
nulový úhel (ramena splývající polopřímky), $\sphericalangle$ ostrý, $\sphericalangle$ pravý, $\sphericalangle$ tupý, $\sphericalangle$ přímý (ramena opačné polopřímky)

Názvy úhlů **podle polohy**:

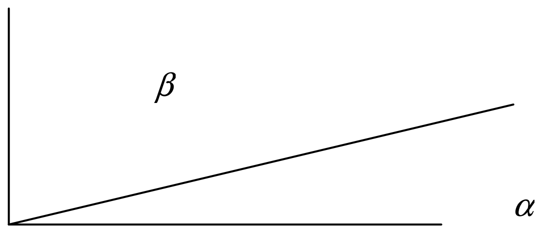


styčné úhly



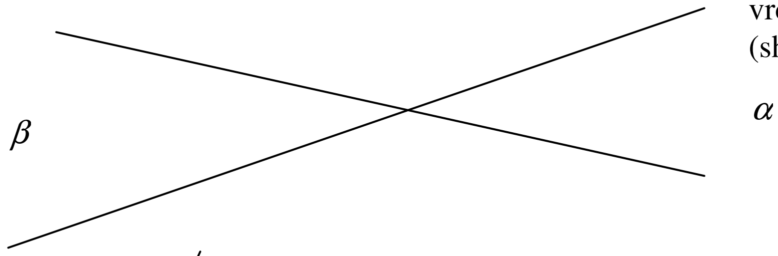
vedlejší

$\alpha + \beta = 180^0$

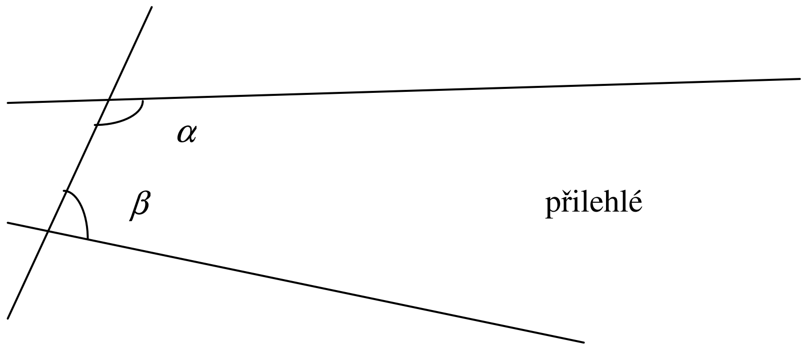


doplňkové

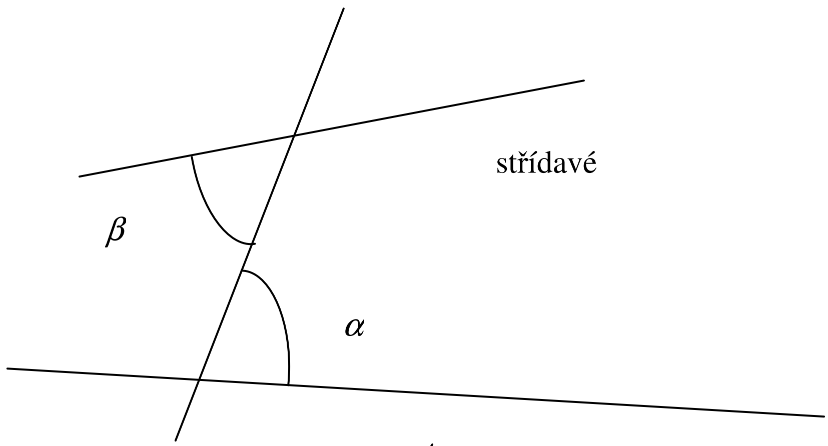
$\alpha + \beta = 90^0$



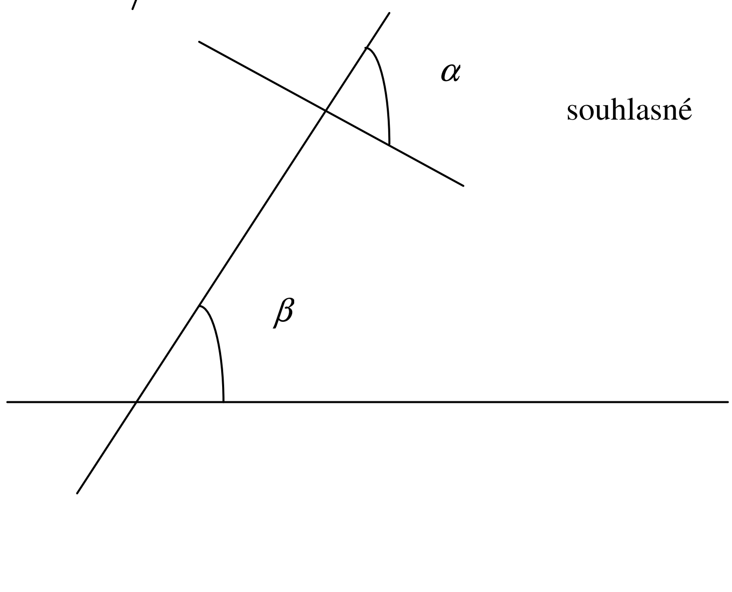
vrcholové
(shodné)



přilehlé



střídavé

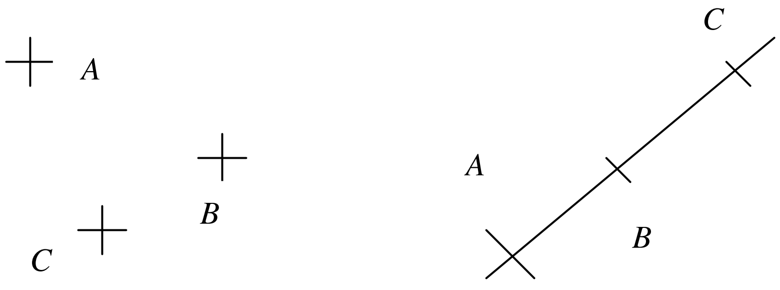


souhlasné

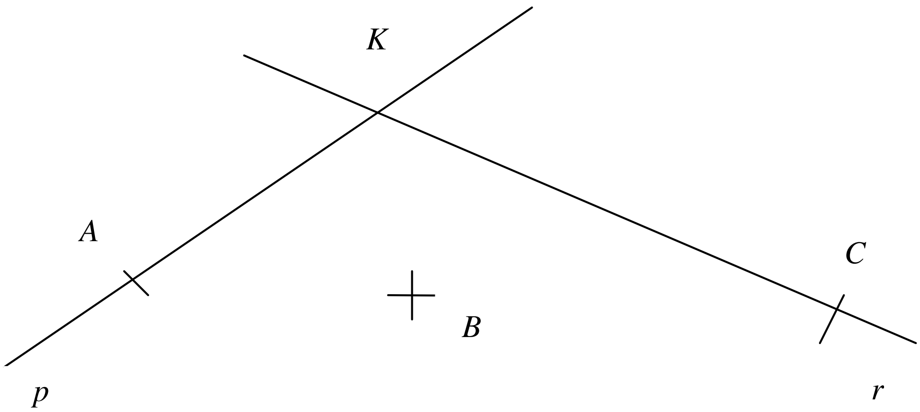
Přímka, bod – úlohy k řešení

1) Zapište všechny přímky dané třemi různými body A, B, C, které

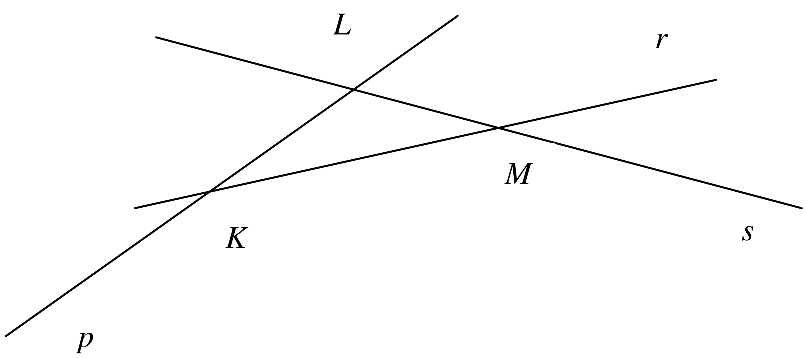
a) neleží na jedné přímce b) leží na jedné přímce



2) Zapište vztahy mezi body a přímkami, které jsou vyznačeny na obrázku.



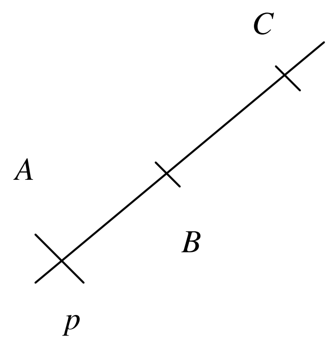
3) Určete body K, L, M pomocí přímek p, r, s.



$K =$ $L =$ $M =$

4) Zapište všechny přímky, které jsou určeny body A, B, C, D, E, z nichž žádné tři neleží na téže přímce.

Polopřímka, úsečka – úlohy k řešení



Zapište všechny polopřímky dané třemi různými body A, B, C.

polopřímky:

uveďte dvojici opačných polopřímek:

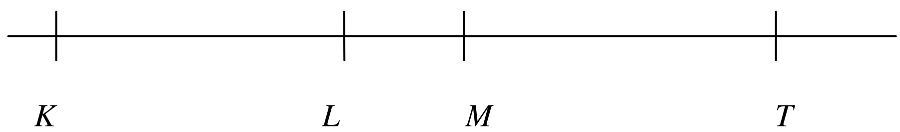
zapište vztah mezi polopřímkami AC, BC :

doplňte rovnice: $\mapsto BA \cap \mapsto BC =$

$\mapsto AB \cap \mapsto BC =$

doplňte znak, určující vztah mezi $\mapsto BC$ a p : $\mapsto BC$ …….. p

1) Charakterizujte úsečky KL, LM, MT pomocí průniku polopřímek.



$KL =$

$LM =$

$MT =$

2) Zapište výsledky uvedených operací s úsečkami z předchozího obrázku.

$KL \cap LM =$

$KL \cup LM =$

$KM \cap LT =$

Polorovina – úlohy k řešení

1) Zapište všechny poloroviny dané třemi různými body A, B, C, které neleží na jedné přímce. Vyznačte jejich hraniční přímky a vyšrafujte polorovinu ABC. Určete průnik poloroviny ABC a přímky AC.

obrázek:

$\times A$

$\times B$

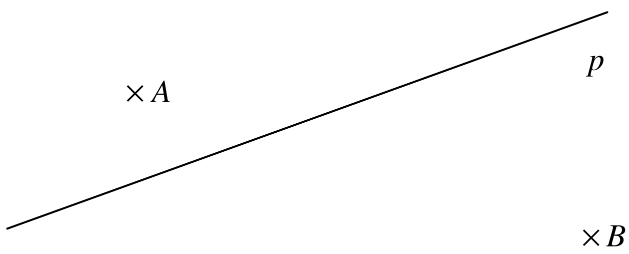
$\times C$

poloroviny:

$\mapsto ABC \cap \leftrightarrow AC =$

2) Zapište poloroviny dané přímkou p a body A, B, které na ní neleží.

obrázek:



poloroviny:

doplňte: průnikem polorovin je …………………..

uvedené poloroviny se nazývají……………………………..

přímka p se pro ně nazývá…………………………….

3) Jsou dány rovnoběžné přímky p, r a body $K \in p$, $M \in r$, $T \notin p \wedge T \notin r$.

Načrtněte obrázek.

Vyšrafujte (vyznačte) množiny:

$\mapsto pM \cap \mapsto rK$

$\mapsto pM \cap \mapsto rT$

$\mapsto rT \cap rK$

Rozhodněte o pravdivosti výroků : $\leftrightarrow KM \subset \leftrightarrow KMT$ …………………….

$\leftrightarrow KM \subset \mapsto KMT$ …………………….

$\leftrightarrow KM \subset \mapsto rT$ …………………….

$\leftrightarrow p \subset \mapsto rK$ …………………….

Určete opačnou polorovinu k $\mapsto rT$ ……………………..

4) Zapište symbolicky :

úsečka CD leží v polorovině ABE ……………………………………………

polopřímka GD neleží v polorovině ABE ……………………………………………

bod F neleží v rovině CDE ……………………………………………

polorovina CGB splývá s polorovinou CDE ……………………………………………

bod F leží v rovině CDA ……………………………………………

přímka p leží v obou polorovinách ABE a ACG ………………………………………..,

Úhel – úlohy k řešení

1) Jsou dány tři body, které neleží v přímce.Vyznačte v následujícím obrázku (odlište barevně)
   a. konvexní úhel ACB
   b. vrcholový úhel ke konvexnímu úhlu CBA
   c. úhel vedlejší ke konvexnímu úhlu ABC s ramenem BC
   d. nekonvexní úhel ABC

   obrázek :

$\times A$

$\times B$

$\times C$

2) Zapište všechny konvexní úhly s vrcholem v bodě V a vyznačte je v obrázku.

obrázek:

$\times A$ $\times V$

$\times B$ $\times C$

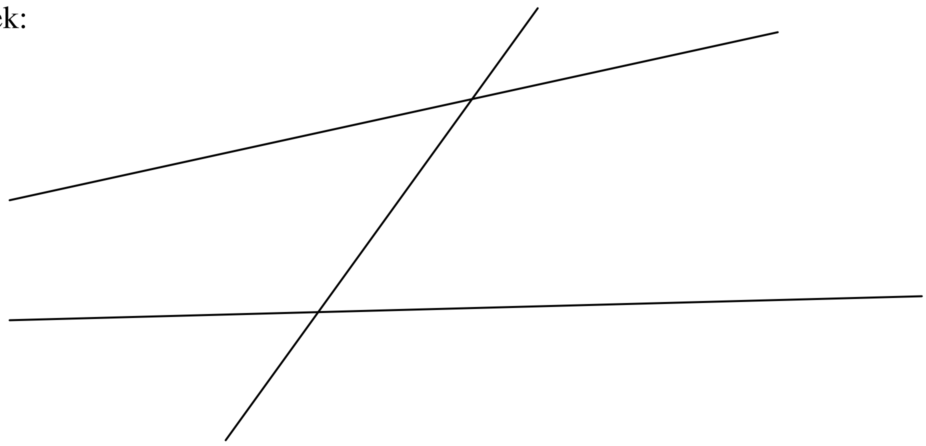
konvexní úhly :

pojmenujte dvojici konvexních úhlů ABV a VBC :

3) V obrázku vyznačte vždy jednu dvojici uvedených úhlů.

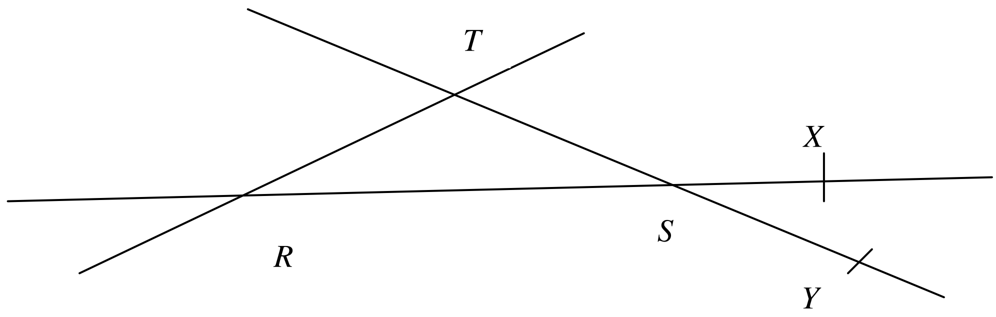
α, β	vedlejší úhly
β, β'	vrcholové úhly
β, β''	souhlasné úhly
α, α'	střídavé úhly

obrázek:



4) Určete daný úhel jako průnik vhodných polorovin.

obrázek:



konvexní úhel $RTS =$ ………………………………..

konvexní úhel $STR =$ ……………………………….

konvexní úhel $TRS =$ ………………………………

pojmenujte dvojice konvexních úhlů: $\sphericalangle XST, \sphericalangle RST$

$\sphericalangle TSR, \sphericalangle XSY$

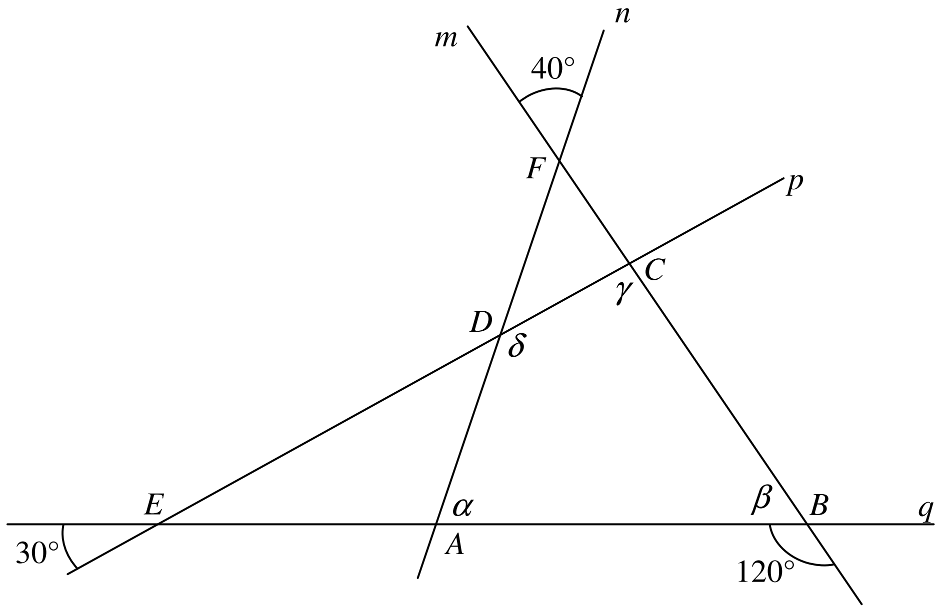
zapište jeden úhel přímý ……………………………

ostrý ……………………………

tupý ……………………………

5) Různoběžky p, q jsou proťaty různoběžnými přímkami m, n podle obrázku. Určete velikosti úhlů $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

obrázek:



řešení :

Vzájemná poloha přímek v rovině

Klasifikaci provádíme v závislosti na počtu společných bodů dvou přímek.

- Jestliže dvě přímky p, q mají společný právě jeden bod P, nazývají se

  různoběžky

  jejich společný bod se nazývá průsečík
  zápis: $P = p \cap q$ symbol: $p \times q$

- Jestliže dvě přímky p, q nemají žádný společný bod, nazývají se

  rovnoběžky

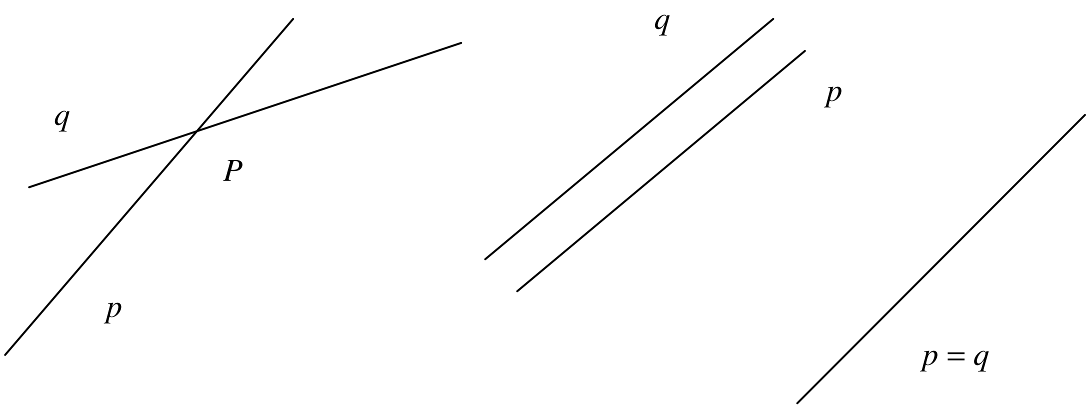
  zápis: $p \cap q = \emptyset$ symbol : $p \parallel q$

- Jestliže dvě přímky p, q mají všechny body společné, nazývají se

  totožné (splývající)

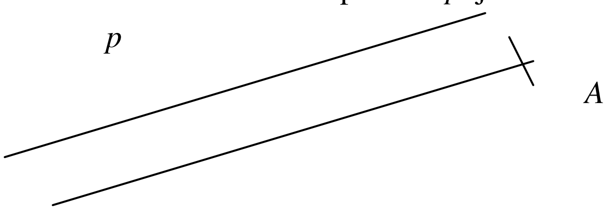
  zápis : $p \cap q = p = q$ symbol : $p = q$ (zvláštní případ rovnoběžnosti)

  obrázek:

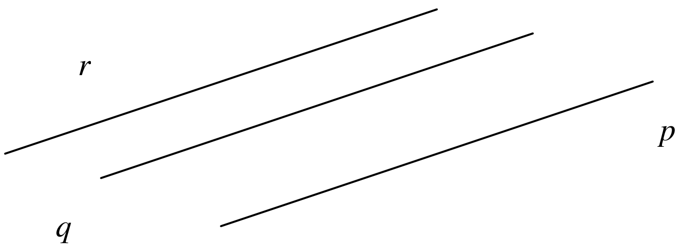


<u>Věty o rovnoběžnosti</u>

V1 Daným bodem A lze vést k dané přímce p jedinou rovnoběžku.



V2 Je-li $p \,//\, q$ a $q \,//\, r$, pak $p \,//\, r$. (tranzitivnost rovnoběžnosti)



Odchylka φ dvou přímek

je - menší ze dvou úhlů, které svírají různoběžky p, q
- nulový úhel, jsou-li p, q rovnoběžky

$\varphi \in \langle 0^0; 90^0 \rangle$

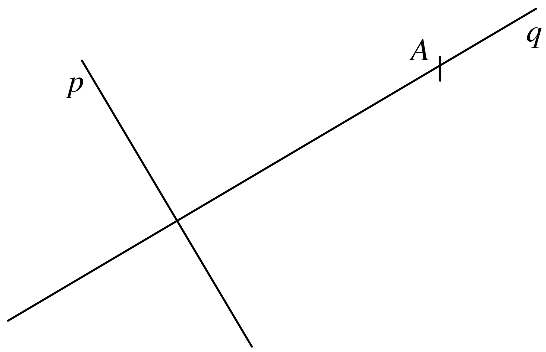
Přímky, které svírají pravý úhel, se nazývají

kolmice

symbol : $p \perp q$

průsečík P kolmých přímek se nazývá pata kolmice

V3 Každým bodem A v rovině lze vést k dané přímce p právě jednu kolmici q.



Vzájemná poloha přímek v rovině-úlohy

1) Zvolíme čtyři přímky *a*, *b*, *c*, *d* tak, že $a \parallel b$, $c \nparallel d$. Určete největší a nejmenší počet průsečíků těchto přímek.

řešení: rozlišíme případy, které vzhledem k zadání mohou nastat
náčrtek situací:

2) Určete, na kolik částí rozdělí rovinu

a) pět různých rovnoběžek

b) n různých rovnoběžek

Proveďte náčrtek pro a)

3) Je dáno n různých navzájem různoběžných přímek, z nichž žádné tři neprocházejí jedním bodem. Určete počet všech průsečíků daných přímek.

řešení:

4) Ve čtverci $ABCD$ určete a zapište

a) dvojici rovnoběžek

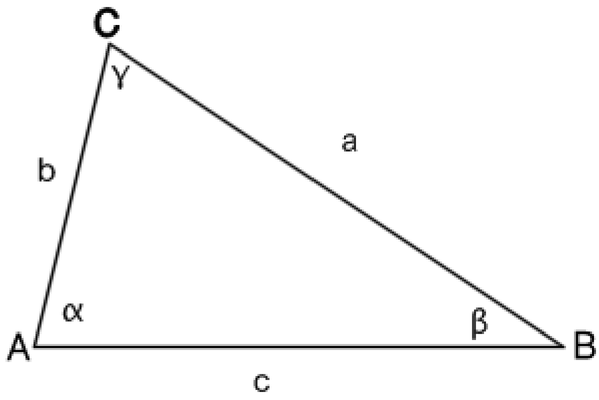
b) dvojici různoběžek kolmých

c) dvojici různoběžek, které nejsou kolmé

Načrtněte.

Trojúhelník

Trojúhelník ABC je určen třemi různými body v rovině, které neleží v přímce.
Je **průnikem tří polorovin**
$\mapsto ABC \cap \mapsto BCA \cap \mapsto ACB$ **.**



Základní prvky :

strany	$\lvert AB\rvert = c, \lvert AC\rvert = b, \lvert BC\rvert = a$
vrcholy	A, B, C
vnitřní úhly	α, β, γ

Rozdělení trojúhelníků podle velikosti stran

různostranné	$a \neq b \neq c$
rovnoramenné	2 shodné strany = ramena, zbývající strana základna
rovnostranné	$a = b = c$

Rozdělení trojúhelníků podle úhlů

ostroúhlé	všechny vnitřní úhly jsou ostré
pravoúhlé	právě jeden vnitřní úhel je pravý
tupoúhlé	právě jeden vnitřní úhel je tupý

Věty o trojúhelnících

V1 Součet délek každých dvou stran je větší než strana třetí. (trojúhelníková nerovnost)
V2 Proti větší straně leží větší vnitřní úhel, proti shodným stranám leží shodné úhly.
V3 Součet vnitřních úhlů trojúhelníku je úhel přímý. ($\alpha + \beta + \gamma = 180^0$)

Další prvky trojúhelníku

výška je kolmice spuštěná z vrcholu na protější stranu
ortocentrum je průsečík výšek
těžnice je spojnice vrcholu se středem protější strany, těžnice se protínají ve $\frac{2}{3}$ od vrcholu počínaje
těžiště je průsečík těžnic
střední příčka je spojnice středů dvou sousedních stran, je rovnoběžná se stranou, kterou neprotíná a rovná se její polovině
střed kružnice opsané leží v průsečíku os stran
střed kružnice vepsané leží v průsečíku os vnitřních úhlů

Trojúhelník - úlohy k řešení

1) Je dán trojúhelník se stranami $a = 12, b = 8, c = 9$. Seřaďte úhly podle velikosti.

řešení :

2) Určete velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC, jsou-li v poměru

$\alpha : \beta : \gamma = 3 : 4 : 5$

$\alpha =$ $\beta =$ $\gamma =$

3) Určete velikosti vnějších úhlů trojúhelníku ABC z příkladu 2)

řešení :

4) V trojúhelníku ABC (libovolném) sestrojte

- výšku v_c na stranu c
- těžnici t_a
- střední příčku rovnoběžnou s AB
- těžiště T
- ortocentrum O

5) Mezi vnitřními úhly v trojúhelníku platí vztahy $\alpha = 2\beta$, $\beta = 3\gamma$. Určete je.

Shodnost trojúhelníků – teorie

Trojúhelníky ABC, $A'B'C'$ jsou **shodné**, jestliže je lze přemístit tak, že se kryjí.
Vrchol A přejde v A', B v B', C v C'.
Každé dvě k sobě příslušné strany jsou shodné, každé dva k sobě příslušné úhly jsou shodné.

symbolický zápis: $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$

Věty o shodnosti trojúhelníků
Pro shodnost trojúhelníků stačí, aby bylo splněno kterékoliv z následujících kritérií (postačující podmínky)

V1 Trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se ve třech stranách. (věta *sss*)

V2 Trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se ve dvou stranách úhlu jimi sevřeném. (*sus)*

V3 Trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se ve dvou stranách a úhlu proti větší z nich. (*Ssu)*

V4 Trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se v jedné straně a v obou úhlech k ní přilehlých. (*usu)*

Tyto věty platí i obráceně, tj. pokud podmínka je splněna, jsou uvedené trojúhelníky shodné.
Uvedené věty nejčastěji používáme pro důkazy shodnosti dvou úseček.

Shodnost trojúhelníků – úlohy k řešení

1) Je dán trojúhelník ABC, p je přímka, v níž leží těžnice t_c daného trojúhelníku. Dokažte, že body A a B mají od přímky p stejnou vzdálenost.

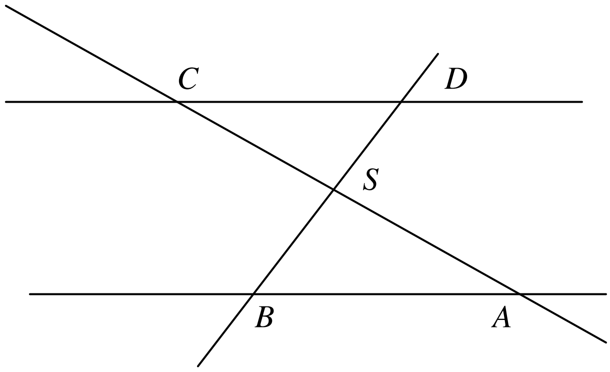
obrázek:

Z bodů A, B vedeme kolmice na p, paty označíme P, Q. Délky úseček AP a BQ určují vzdálenosti bodů A, B od přímky p.

Platí :

2) Bod S je středem úsečky AC a body B, S, D leží v téže přímce (viz obr.). Dokažte, že bod S je také středem úsečky BD.

obrázek :



řešení:

Podobnost trojúhelníků – teorie

Trojúhelníky ABC, $A'B'C'$ jsou **podobné**, právě když existuje kladné číslo k takové, že pro délky stran trojúhelníků platí :

$$a' = k \cdot a \wedge b' = k \cdot b \wedge c' = k \cdot c$$

číslo k se nazývá **koeficient podobnosti**

je – li $k > 1 \Rightarrow$ zvětšení

je – li $k < 1 \Rightarrow$ zmenšení

je – li $k = 1 \Rightarrow$ shodnost

symbolický zápis: $\Delta ABC \approx \Delta A'B'C'$

Věty o podobnosti trojúhelníků

V1 Trojúhelníky jsou podobné, shodují – li se ve dvou úhlech. (uu)

V2 Trojúhelníky jsou podobné, mají – li sobě rovné poměry dvou stran a shodné úhly jimi sevřené. (sus)

V3 Trojúhelníky jsou podobné, mají – li sobě rovné poměry dvou stran a shodné úhly proti větší z nich. (Ssu)

Platí i věty obrácené.

Podobnost trojúhelníků – úlohy k řešení

1) Rozhodněte, zda jsou podobné trojúhelníky o stranách 12 cm, 16 cm, 19 cm a 10 cm, 13 cm, 15 cm.

2) Rozhodněte o podobnosti trojúhelníků s úhly 38°, 55° a v druhém s úhly 55°, 87°.

3) Trojúhelníkové pole je na plánu 1:50 000 zakresleno jako trojúhelník o stranách 32,5 mm, 23,5 mm a 36 mm. Určete jeho skutečné rozměry.

4) Určete měřítko mapy, je-li les tvaru trojúhelníku o rozměrech 1,6 km , 2,4 km a 2,7 km na mapě zakreslen jako trojúhelník o stranách 32 mm, 48 mm a 54 mm.

5) Je dán libovolný trojúhelník ABC. Sestrojte trojúhelník $A'B'C'$ podobný trojúhelníku ABC tak, aby

a) $|B'C'| = \frac{3}{2}|A'B'|$ b) $v_a = 2v_a$

6) Svislá metrová tyč vrhá stín 150 cm dlouhý. Vypočtěte výšku věže, jejíž stín je ve stejném okamžiku dlouhý 36 metrů.

Množiny bodů dané vlastnosti

K řešení planimetrických úloh velmi často používáme mimo jiné tzv.

množiny bodů dané vlastnosti.

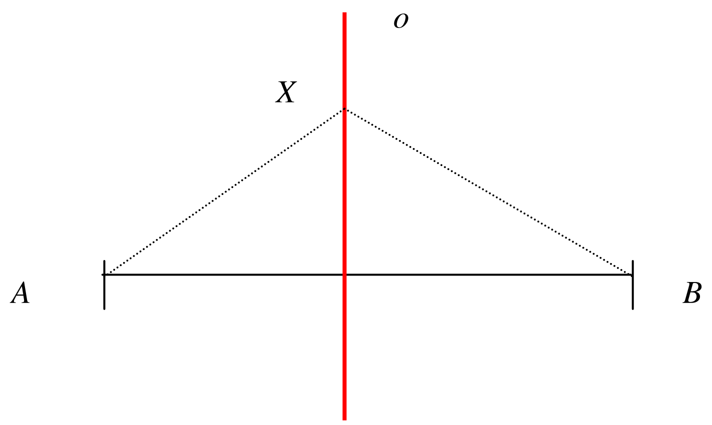
Pokud uvedenou množinu označíme *M*, pak musí splňovat tyto vlastnosti:

1. Každý bod množiny M má danou charakteristickou vlastnost.
2. Každý bod roviny, který danou vlastnost má, patří do množiny M a každý bod, který tuto vlastnost nemá do množiny nepatří.

V přehledu si uvedeme nejpoužívanější množiny.

1. Množina bodů X roviny ρ, které jsou stejně vzdáleny od dvou různých bodů A, B roviny ρ je osa úsečky AB.
   Symbolický zápis: $o = \{X \in \rho, |AX| = |BX|\}$

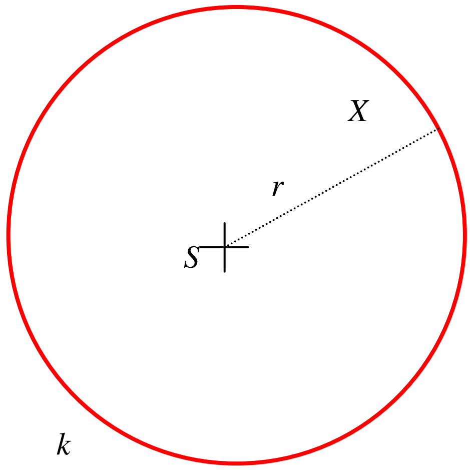
   Obrázek:



2. Množina všech bodů X roviny ρ, které mají stejnou vzdálenost r od daného bodu S je **kružnice** k se středem S a poloměrem r.

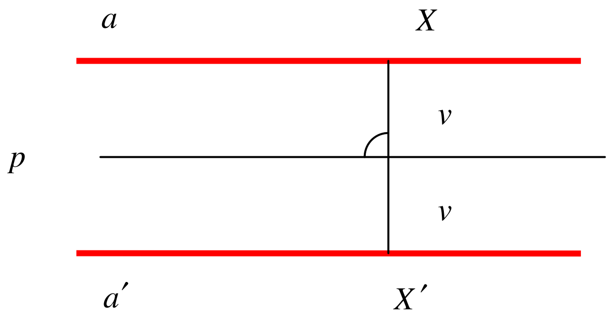
Pozn. zároveň je uvedená kružnice množinou středů všech kružnic s poloměrem r, které procházejí daným bodem S.
Symbolický zápis: $k(S;r) = \{X \in \rho; |SX| = r\}$

Obrázek:



3. Množina všech bodů X roviny ρ, které mají od dané přímky p kladnou vzdálenost v je **dvojice přímek** $a;a'$, které jsou s danou přímkou rovnoběžné, leží v opačných polorovinách vymezených přímkou p a mají od ní vzdálenost v.
Tuto dvojici přímek nazýváme **ekvidistanta přímky**.

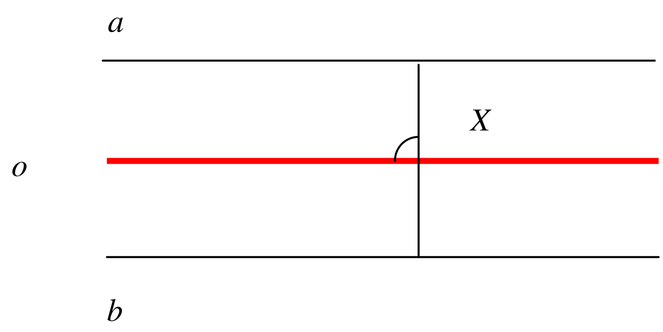
Symbolický zápis : $a \cup a' = \{X \in \rho; |Xp| = v\}$
Obrázek :



4. Množina všech bodů X roviny ρ, které mají od dvou daných rovnoběžek $a;b, a \neq b$ stejnou vzdálenost je osa pásu, vymezeného přímkami $a;b$. Osu označíme o.

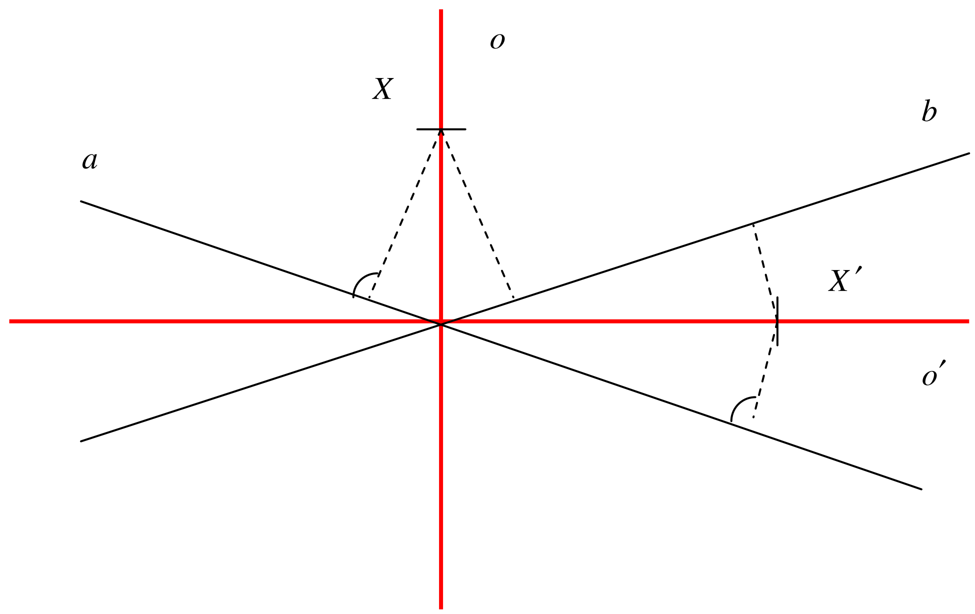
Pozn. Zároveň je osa pásu množinou středů všech kružnic, které se dotýkají daných rovnoběžek.

Symbolický zápis : $o = \{X \in \rho; |Xa| = |Xb|\}$
Obrázek :



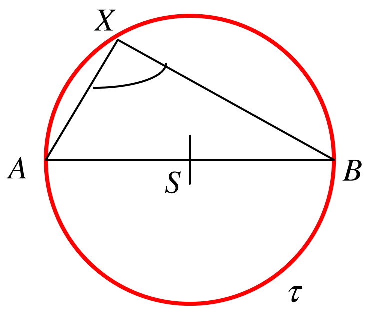
5. Množina všech bodů X roviny ρ, které mají stejnou vzdálenost od dvou různoběžek $a;b$ jsou osy úhlů sevřených různoběžkami $a;b$. Osy označíme $o;o'$.
Pozn. Zároveň lze říci, že osy $o;o'$ s výjimkou jejich průsečíku, jsou množinou středů všech kružnic, které se dotýkají daných různoběžek.

Symbolický zápis : $o \cup o' = \{X \in \rho; |Xa| = |Xb|\}$
Obrázek :



6. Množina vrcholů X všech pravých, jejichž ramena procházejí body $A, B(A \neq B)$, tj. množina všech bodů, z nichž vidíme úsečku AB pod pravým úhlem, je kružnice s průměrem AB kromě bodů A, B, tzv. Thaletova kružnice.

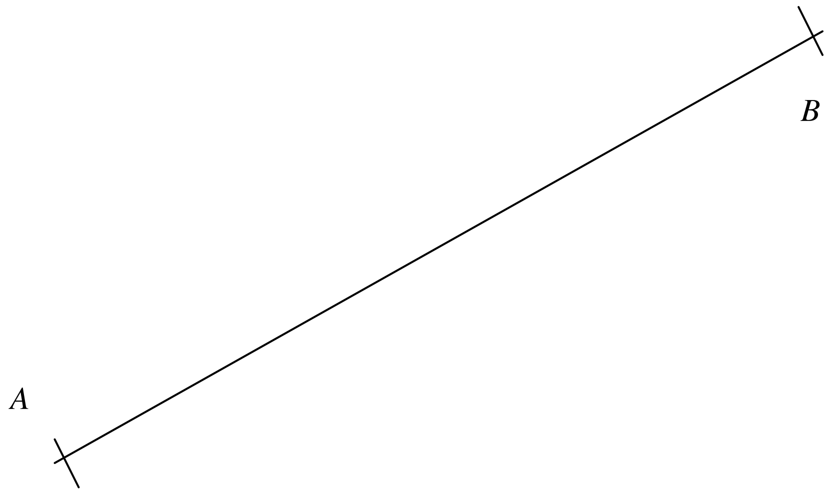
Symbolický zápis: $\tau = \{X \in \rho, |\sphericalangle AXB| = 90°\}$
Obrázek :



Úlohy k řešení (základní konstrukce)

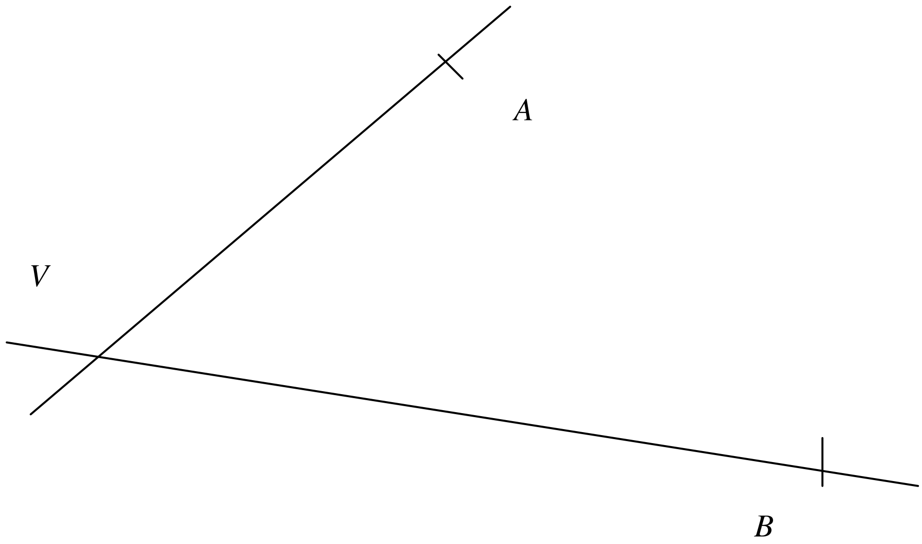
Nejprve si zopakujte základní konstrukce.

1) Sestrojte osu úsečky AB. Popište konstrukci. Sestrojte libovolnou kružnici, která prochází body A, B.



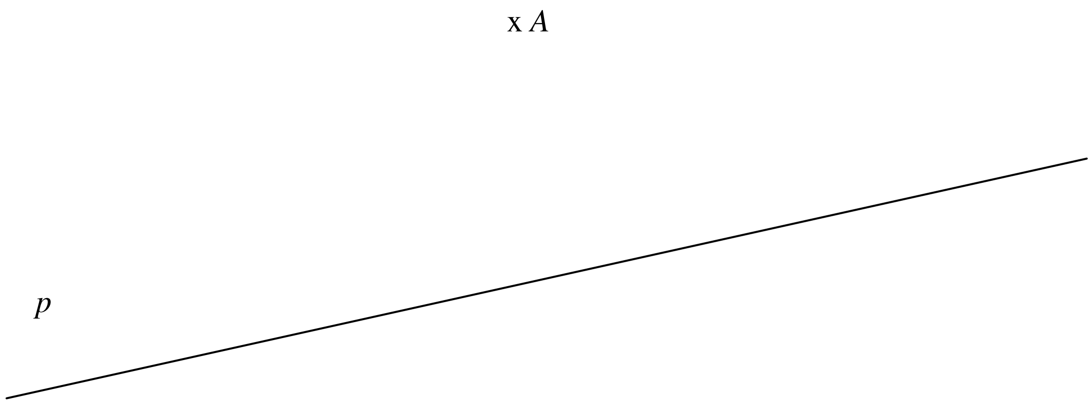
Popis konstrukce:

2) Sestrojte osu úhlu AVB . Popište konstrukci.



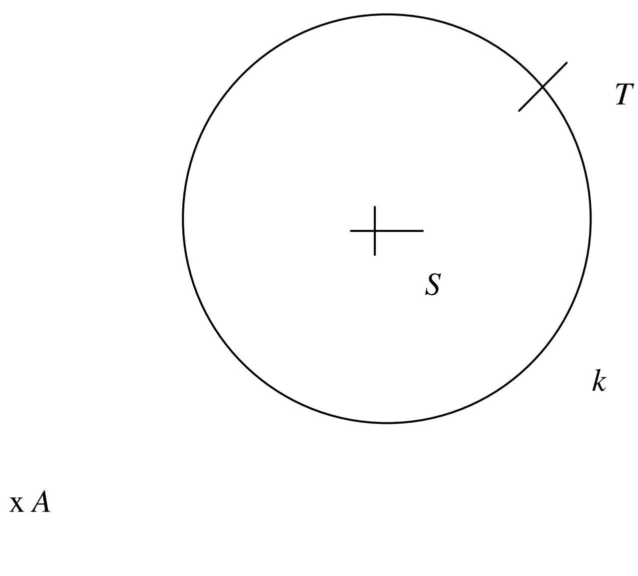
Popis konstrukce :

3) Sestrojte k dané přímce p kolmici k a rovnoběžku r bodem $A \notin p$.



4) Sestrojte Thaletovu kružnici nad průměrem AB. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník s přeponou AB.

5) Sestrojte tečnu kružnice k v jejím bodě T a z vnějšího bodu A.



Mnohoúhelníky – teorie

Uzavřená lomená čára spolu s částí roviny ohraničené touto lomenou čarou se nazývá

mnohoúhelník.

Lomená čára, která jej ohraničuje, se nazývá **obvod,** její vrcholy a strany jsou **vrcholy** a **strany mnohoúhelníku.**

Počet stran je roven počtu vrcholů, mnohoúhelník, který má n vrcholů, se nazývá n-úhelník.

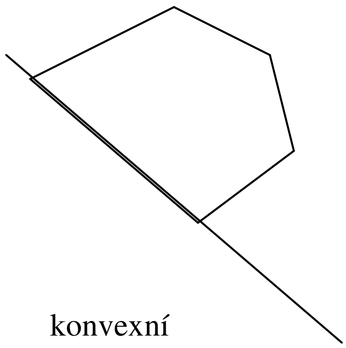
Spojnice každých dvou nesousedních vrcholů se nazývá **úhlopříčka**. (trojúhelník nemá úhlopříčky).

Počet úhlopříček v n-úhelníku je $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$.

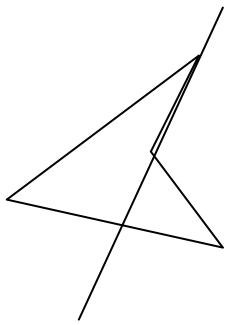
Součet vnitřních úhlů je $(n-2) \cdot 180^0$.

Konvexní mnohoúhelník leží vždy v jedné z polorovin, určených kteroukoliv stranou.

Obrázek :



konvexní



nekonvexní

Pravidelný n-úhelník je konvexní mnohoúhelník, jehož všechny strany a úhly jsou shodné. Lze mu vepsat i opsat kružnici.

Samostatnou skupinu n-úhelníků tvoří pro $n = 4$

Čtyřúhelníky

- budeme se specielně zabývat konvexními čtyřúhelníky

Rozdělení čtyřúhelníků

1. **Různoběžníky** – žádné dvě strany nejsou rovnoběžné
2. **Lichoběžníky** – dvě strany jsou rovnoběžné, zbývající nikoliv. Rovnoběžné strany se nazývají **základny**, zbývající **ramena. Rovnoramenný lichoběžník** má shodná ramena. **Pravoúhlý lichoběžník** má jedno rameno kolmé k základnám.
3. **Rovnoběžníky** – obě dvojice protějších stran jsou rovnoběžné.
   Podle **velikosti úhlů** dělíme rovnoběžníky na
   a) **pravoúhlé** – obdélník, čtverec
   b) **kosoúhlé** – kosodélník, kosočtverec

Podle **velikosti stran** na
a) **rovnostranné** – čtverec, kosočtverec
b) **různostranné** – obdélník, kosodélník

Základní vlastnosti rovnoběžníku:

- Protější strany jsou shodné.
- Protější vnitřní úhly jsou shodné.
- Úhlopříčky se navzájem půlí, jejich průsečík je středem rovnoběžníku.
- Úhlopříčky rovnostranných rovnoběžníků půlí jejich vnitřní úhly a jsou na sebe kolmé.

Čtyřúhelník, jemuž lze opsat kružnici, se nazývá **tětivový**.
Čtyřúhelník, jemuž lze vepsat kružnici, se nazývá **tečnový**.
Deltoid je čtyřúhelník, jehož úhlopříčky jsou na sebe kolmé a jedna z nich prochází středem druhé.

Mnohoúhelníky – úlohy k řešení

1) Sestrojte pravidelný šestiúhelník o straně $a = 3\,cm$. Určete velikost jeho vnitřních úhlů.

Konstrukce :

Součet vnitřních úhlů je ……………………………..

Vnitřní úhel je ……………………….

2) Určete počet úhlopříček v n-úhelníku pro $n = 5;6;8;12$

Užijeme vztah: počet úhlopříček ………………………………

n	počet úhlopříček
5	
6	
8	
12	

3) Který konvexní n-úhelník má dvakrát víc úhlopříček než stran?

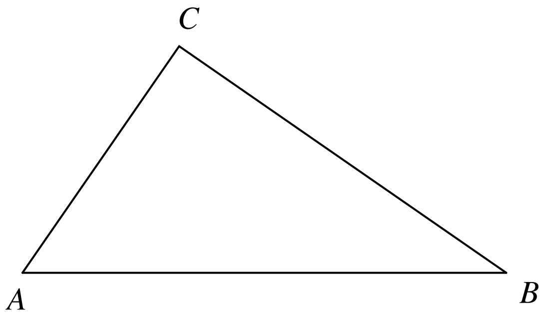
4) Kolik vrcholů má pravidelný n-úhelník, jehož všechny vnitřní úhly mají velikost 144°?

5) V lichoběžníku $ABCD$, $AB \parallel CD$ je $\alpha = 57^0$, $\gamma = 4\beta$. Určete vnitřní úhly.

Konstrukce trojúhelníků-úlohy

1) Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: v_a = 3,8 cm, v_c = 4,2 cm, γ= 30°

Rozbor:

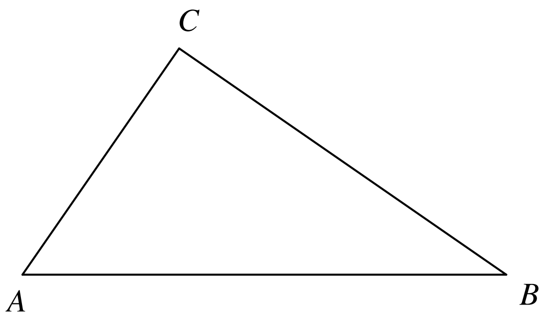


Postup:

Konstrukce:

2) Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: $\alpha = 30°$, $v_c = 2$ cm, $|BC| + |AC| = 6{,}5$ cm

Rozbor:

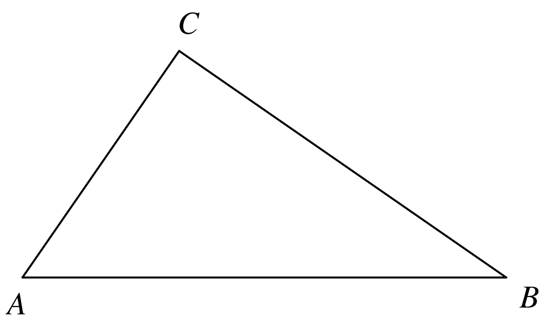


Konstrukce:

Postup:

3) Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: $t_c = 2{,}1$ cm, $t_a = 6$ cm, $t_b = 4{,}2$ cm

Rozbor:

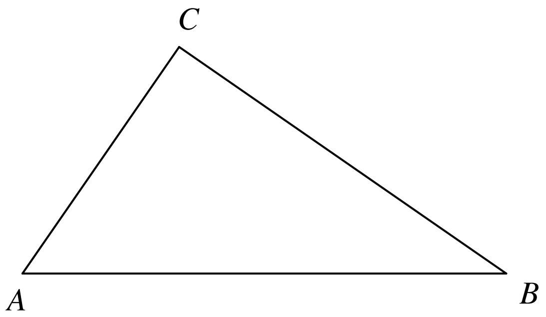


Konstrukce:

Postup:

4) Sestrojte trojúhelník *ABC*, je-li dáno: $\rho = 1{,}3$ cm, $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$

Rozbor:

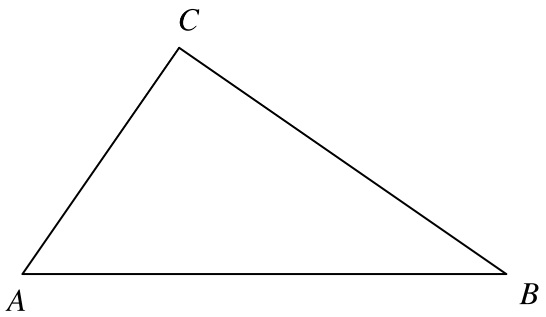


Konstrukce:

Postup:

5) Sestrojte trojúhelník *ABC*, je-li dáno: $a = 4$ cm, $t_a = 6{,}3$ cm, $t_b = 6$ cm

Rozbor:



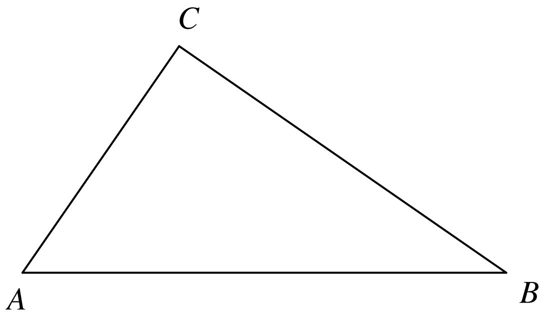
Konstrukce:

Postup:

6) Sestrojte trojúhelník *ABC*, je-li dáno: $c = 4$ cm, $\alpha = 60°$, $t_a = 3$ cm

Rozbor:

Postup:

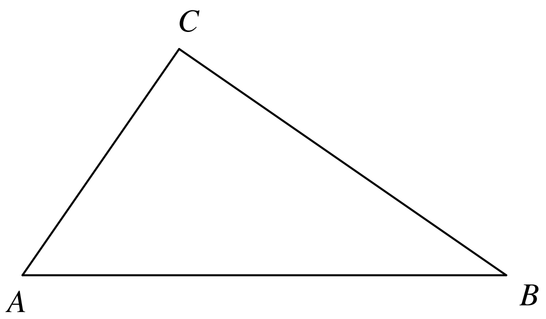


Konstrukce:

7) Sestrojte trojúhelník *ABC*, je-li dáno: $b = 4$ cm, $c = 6$ cm, $t_b = 4$ cm

Rozbor:

Postup:

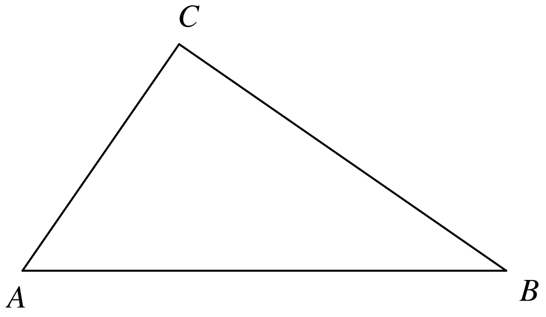


Konstrukce:

8) Sestrojte trojúhelník *ABC*, je-li dáno: $c = 6$ cm, $t_c = 4$ cm, $\alpha = 45°$

Rozbor:

Postup:

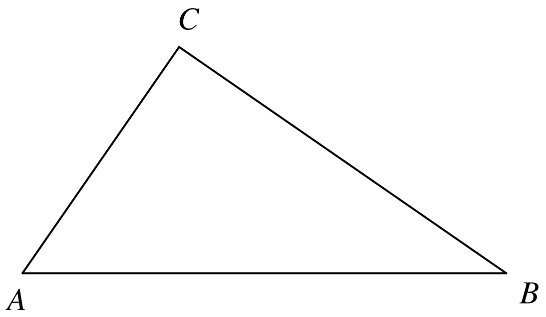


Konstrukce:

9) Sestrojte trojúhelník *ABC*, je-li dáno: $c = 6$ cm, $v_c = 5{,}3$ cm, $a = 7$ cm

Rozbor:

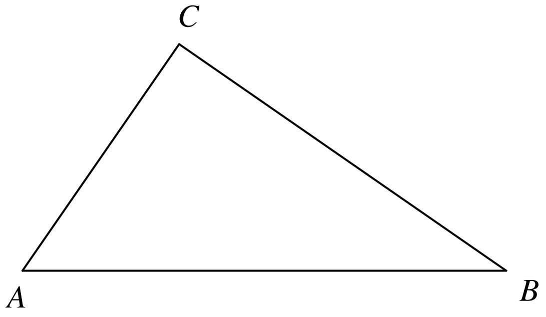
Postup:



Konstrukce:

10) Sestrojte trojúhelník *ABC*, je-li dáno: $\alpha = 60°$, $c = 4$ cm, $v_a = 3$ cm

Rozbor:



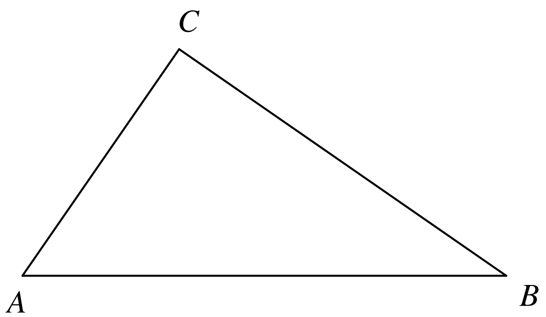
Postup:

Konstrukce:

Diskuse:

11) Sestrojte trojúhelník *ABC*, je-li dáno: $\alpha = 60°$, $\rho = 2$ cm, $v_c = 5$ cm

Rozbor:



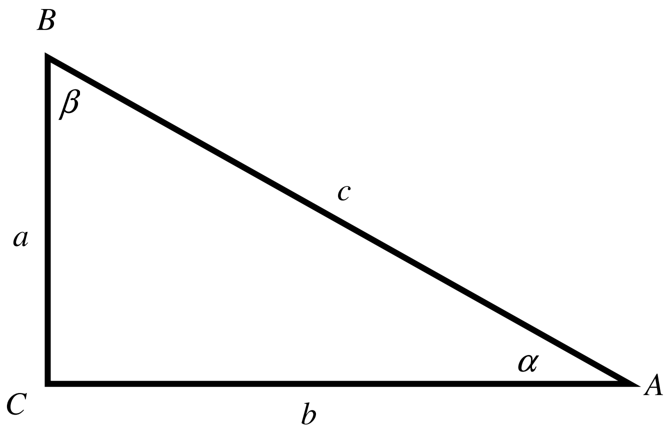
Postup:

Konstrukce:

Diskuse:

Pravoúhlý trojúhelník-teorie

pojmy a označení : a, b odvěsny
c přepona
α, β vnitřní úhly
$\gamma = 90^0$



Vztahy:

$\alpha + \beta = 90^0$

$S = \dfrac{ab}{2}$

Thaletova kružnice – množina vrcholů všech pravých úhlů nad průměrem kružnice.
(kružnice opsaná pravoúhlému trojúhelníku)

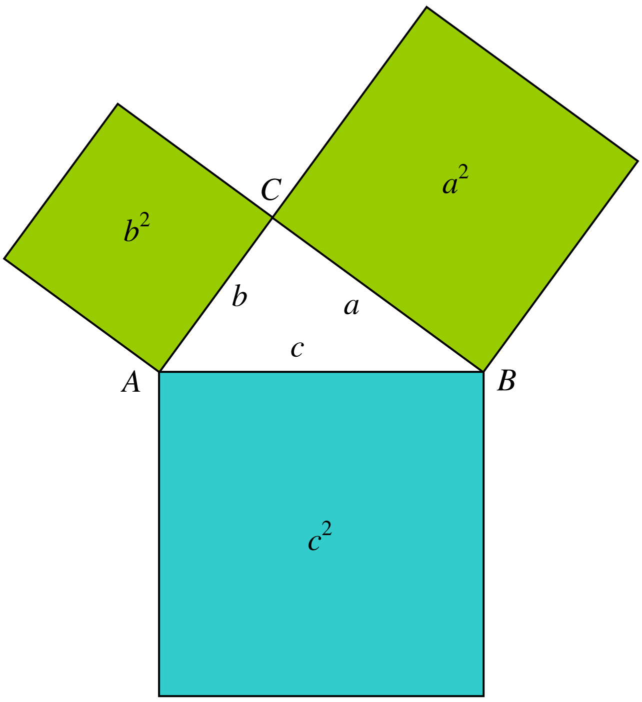
Pythagorova věta:

Obsah čtverce nad přeponou pravoúhlého trojúhelníka je roven součtu obsahů čtverců nad oběma odvěsnami.

Matematické vyjádření :

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Obrázek :



Goniometrické funkce:

Vztahy mezi úhly a stranami

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$ protilehlá odvěsna ku přeponě

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$ přilehlá odvěsna ku přeponě

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$$ protilehlá odvěsna ku přilehlé

$$\mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{b}{a}$$ přilehlá odvěsna ku protilehlé

Pozn. obdobně pro úhel β

Euklidovy věty:

Věta o výšce:

Z podobnosti trojúhelníků ADC, CDB (uu) plyne

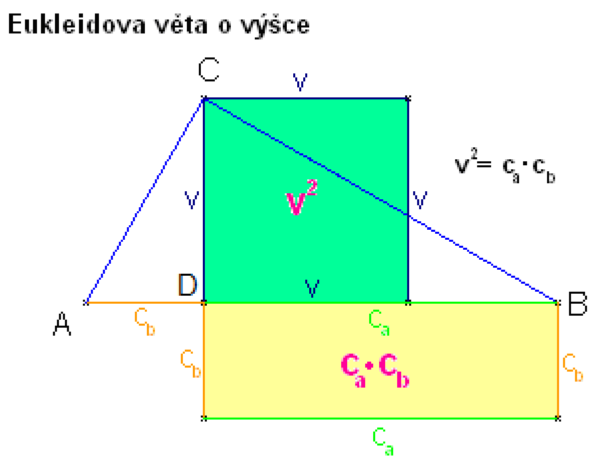
$$\frac{AD}{DC} = \frac{CD}{DB} \quad \Rightarrow \quad \frac{c_b}{v_c} = \frac{v_c}{c_a}$$

$$v_c^{\,2} = c_a \bullet c_b$$

c_a, c_b úseky přepony

v_c výška na přeponu

Obsah čtverce nad výškou pravoúhlého trojúhelníka je roven obsahu obdélníka sestrojeného z obou úseků přepony.



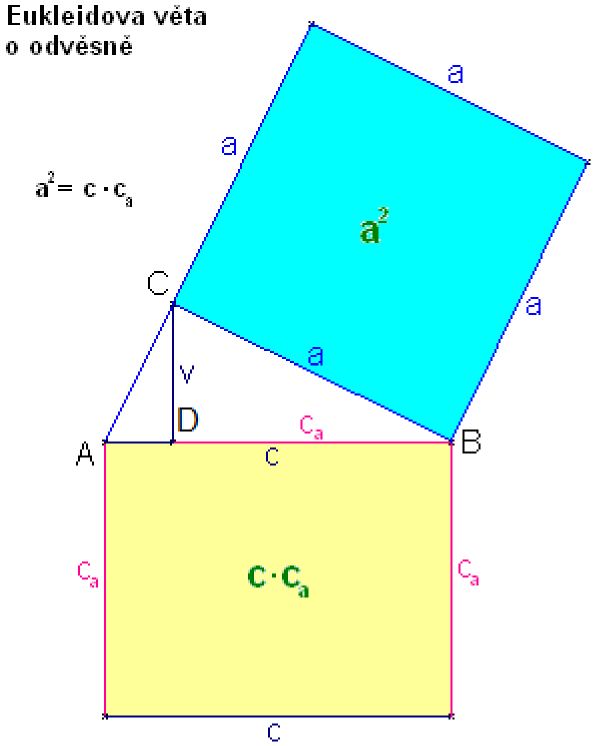
Věta o odvěsně:

Z podobnosti trojúhelníků ABC, CBD (uu) plyne

$$\frac{BC}{BA} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{c_a}{a}$$

$$a^2 = c \cdot c_a \quad \text{obdobně} \quad b^2 = c \cdot c_b$$

Obsah čtverce nad odvěsnou pravoúhlého trojúhelníka je roven obsahu obdélníka sestrojeného z přepony a přilehlého úseku.



Pravoúhlý trojúhelník - úlohy k řešení

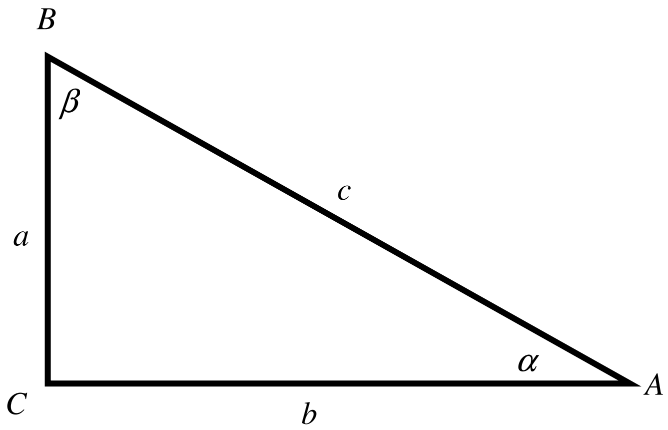
Nebude-li v úlohách uvedeno jinak, rozumí se pravoúhlý trojúhelník s těmito prvky:

pojmy a označení : a, b odvěsny

c přepona

α, β vnitřní úhly

$\gamma = 90^0$



1) Doplňte tabulku pro pravoúhlý trojúhelník ABC. Odvoďte vztah pro výšku.

a	b	c	obvod	obsah	v_c
3		5			
8	6				
	8	17			
10	24				
	12	37			
14	48				
	16	65			
22	120				
$2n$ $n \in N, n > 1$		n^2+1	$\times$	$\times$	$\times$

2) Přepona pravoúhlého trojúhelníku je o 6 cm delší než jedna odvěsna a o 27 cm delší než druhá odvěsna. Určete obvod trojúhelníku.

3) Přepona pravoúhlého trojúhelníku je o 9 cm delší než jedna odvěsna a o 8 cm delší než druhá odvěsna. Určete obvod a obsah trojúhelníku.

4) Určete strany obdélníku, který má obvod 322 cm a úhlopříčku 145 cm.

5) Pravoúhlý trojúhelník má obsah 119 cm^2. Určete odvěsny, je-li jedna o 3 cm delší než druhá.

6) Určete

a) délku přepony pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku s odvěsnou délky a
b) výšku rovnostranného trojúhelníku o straně a
c) úhlopříčku čtverce o straně a (využijte řešení a))

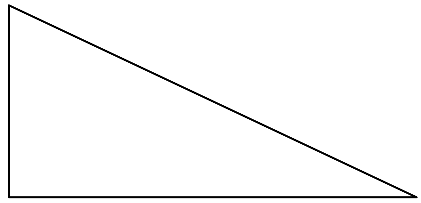
7) Rozhodněte, zda trojúhelník s uvedenými rozměry je pravoúhlý.

a) 5 cm, 12 cm, 13 cm b) $u^2 - v^2$, $2uv$, $u^2 + v^2$

Pravoúhlý trojúhelník – řešení, úlohy

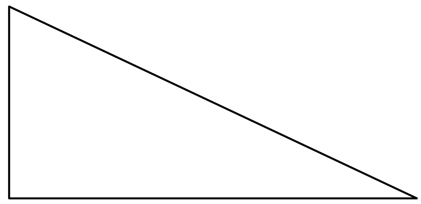
1) Řešte pravoúhlý trojúhelník, je-li dáno: $c = 18{,}2\ \text{cm}$, $\alpha = 32°30'$

obrázek: (vyznačte dané prvky)



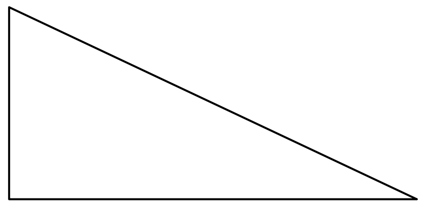
2) Řešte pravoúhlý trojúhelník, je-li dáno: $c = 27{,}5\ \text{cm}$, $a = 22{,}6\ \text{cm}$

obrázek :



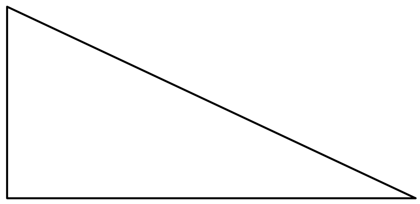
3) Řešte pravoúhlý trojúhelník , je-li dáno : $a + b = 9{,}6\ \text{m}$, $\alpha = 37{,}5°$

obrázek :



4) Řešte pravoúhlý trojúhelník, jsou-li dány těžnice $t_a = 12\,\text{cm}, t_b = 15\,\text{cm}$.

obrázek :



Pravoúhlý trojúhelník – goniometrické funkce

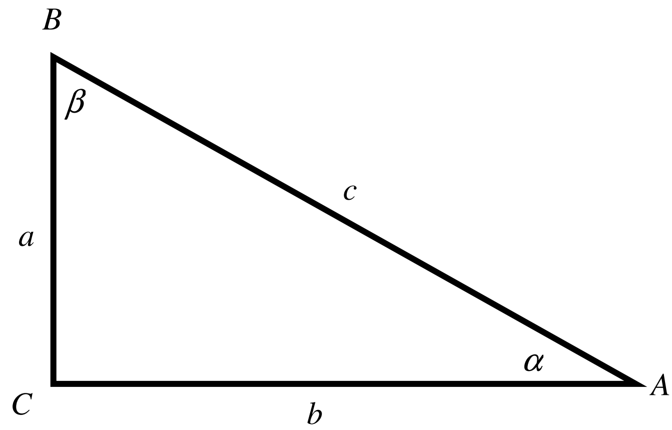
Nebude-li v úlohách uvedeno jinak, rozumí se pravoúhlý trojúhelník s těmito prvky:

pojmy a označení : a, b odvěsny

c přepona

α, β vnitřní úhly

$\gamma = 90^0$



1) Doplňte tabulku pro pravoúhlý trojúhelník ABC (pouze chybějící údaje)

a	b	c	α	β
	5	×	20°	×
	×	20	×	42°
×	15	20	×	
×	10	×		×
	12	37		
14	48			

Pravoúhlý trojúhelník – slovní úlohy

1) Jak dlouhý musí být žebřík, má-li ve vzdálenosti 5 metrů od svislé stěny sahat do výšky 12 metrů ?

obrázek:

2) Jak dlouhý plot nutno zakoupit na oplocení pravoúhlé parcely, je-li nejkratší strana o 20 metrů kratší než nejdelší, prostřední má délku 40 metrů?

obrázek:

3) Jaký je výškový rozdíl míst A, B na trati, která má stoupání 11°, je-li vzdálenost míst A a B 125 metrů?

obrázek:

4) Jak vysoká je sfinga, vidíme-li její vrchol ze vzdálenosti 45 metrů od ní ve výškovém úhlu 27°?

obrázek:

5) Jak vysoká je budova vrhající na dlažbu stín dlouhý 53,6 metru, dopadají-li sluneční paprsky na vodorovnou rovinu pod úhlem 32°?

obrázek:

6) Lanovka má přímou trať stoupající pod úhlem 40°, její délka je 870 metrů. Jaký je výškový rozdíl dolní a horní stanice? V jaké nadmořské výšce je horní stanice, je-li nástupní v nadmořské výšce 570 metrů?

obrázek:

7) Jak vysoký je štít budovy tvaru rovnoramenného trojúhelníku, je-li budova 15 metrů široká a sklon šikmých hran je 38°?

obrázek:

8) Paty dvou sousedních stožárů elektrického vedení mají na svahu výškový rozdíl 18,5 metru. Jak dlouhé vodiče spojují sousední stožáry, je-li úhel sklonu svahu 28° a skutečná délka vodičů je o 1 % delší?

obrázek:

9) Z okna domu stojícího na břehu řeky zaměřili dalekohled nivelačního přístroje na druhý břeh (u vodní hladiny). Jak široká je řeka, jestliže měřící přístroj byl 35 metrů nad hladinou a dalekohledem naměřili odchylku od svislého směru 56°?

obrázek:

10) Jak vysoko vystoupí letadlo letící rychlostí 225 km/h za 10 minut, stoupá-li pod úhlem 5°?

obrázek :

Pravoúhlý trojúhelník – Euklidovy věty, úlohy

1) Sestrojte rovnostranný trojúhelník v soustavě souřadnic, je-li $A\left[-2;2\sqrt{3}\right]$, $B\left[1;\sqrt{5}\right]$.

návod: proveďte pomocné konstrukce úseček o velikosti $\sqrt{3};\sqrt{5}$

.

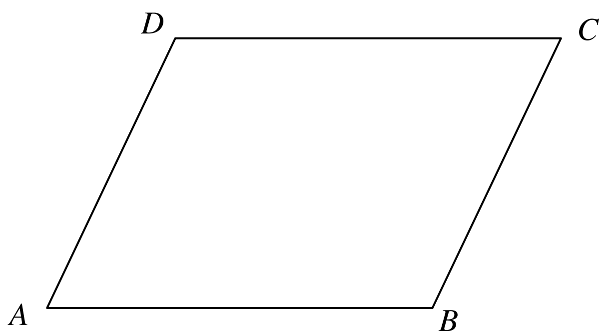
2) Vypočítejte plošný obsah pravoúhlého trojúhelníka s úseky přepony $c_1 = 8{,}5\,\text{cm}; c_2 = 12{,}3\,\text{cm}$.

3) Určete strany a, c v pravoúhlém trojúhelníku ABC, je-li $b = 10; v_c = 8$.

Mnohoúhelníky – konstrukční úlohy

1) Sestrojte rovnoběžník $ABCD$, je-li $|AC| = e = 10cm$, $v_a = 4cm$, $|AB| = 7cm$.

Rozbor: Postup:

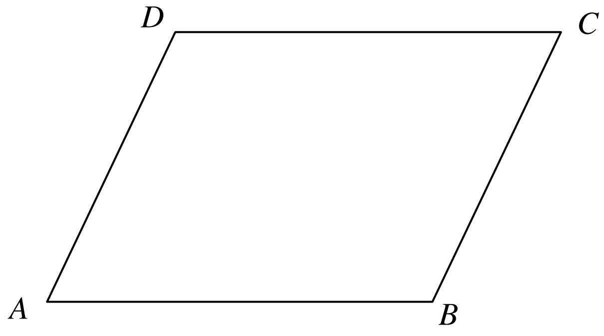


Konstrukce:

2) Sestrojte kosodélník $ABCD$, je-li dáno : $a = 4\text{ cm}, \alpha = 60°, e = 5{,}5\text{ cm}$.

Rozbor:

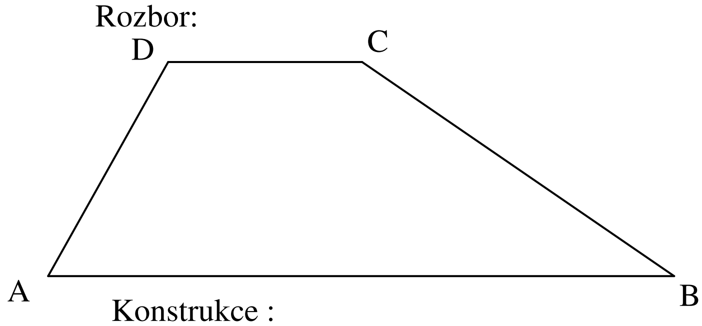
Postup:



Konstrukce:

3) Sestrojte lichoběžník *ABCD*, je-li dáno: $AB \parallel CD$, $b = 4$ cm, $v = 3{,}5$ cm, $e = 8$ cm, $f = 7$ cm.

Rozbor:



Postup:

Konstrukce :

4) Sestrojte čtyřúhelník *ABCD* je-li dáno: $a = 6{,}5\,\text{cm}, \alpha = 60°, \gamma = 90°, \delta = 105°, e = 8\,\text{cm}$.

Rozbor:

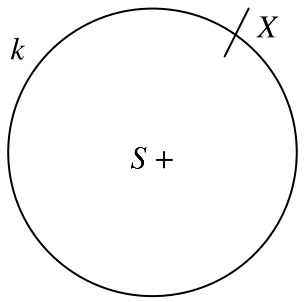
Postup:

Konstrukce :

Kružnice a kruh, úhly v kružnici – teorie

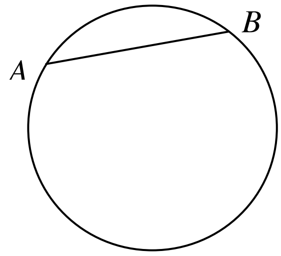
Kružnice k je množina bodů roviny, které mají od daného bodu S konstantní vzdálenost r.
Kruh K je množina všech bodů roviny, které mají od daného bodu S vzdálenost menší nebo rovnu r.
označení : $k(S;r)=\{X \in \rho; |XS| = r\}$

$K(S;r)=\{X \in \rho; |XS| \leq r\}$



S ……střed
r ……poloměr

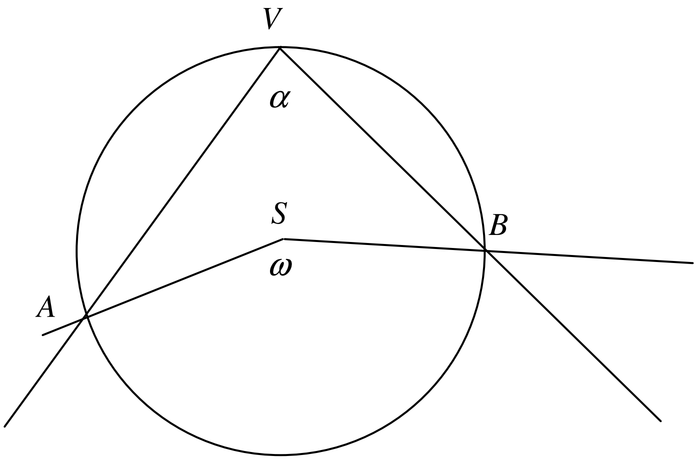
Tětiva kružnice je úsečka, spojující dva libovolné body na kružnici. Nejdelší tětiva je průměr.



Body A, B rozdělí kružnici na dva **kruhové oblouky**. Je-li AB průměr, nazýváme je půlkružnice. Dva libovolné poloměry rozdělí kruh na dvě **kruhové výseče**. Tětiva AB rozdělí kruh na dvě **kruhové úseče**.

Úhel, jehož vrcholem je střed kružnice a ramena procházejí krajními body oblouku AB kružnice k, se nazývá **středový úhel příslušný k oblouku** AB, který v tomto úhlu leží.

Úhel AVB, jehož vrchol V je bodem kružnice k a ramena procházejí krajními body oblouku AB $(V \neq A, V \neq B)$, se nazývá **obvodový úhel** příslušný k tomu oblouku AB, který v tomto úhlu leží. Obvodový úhel je vždy konvexní.



Poznámka
Ke každému oblouku existuje jediný středový úhel a nekonečně mnoho shodných obvodových úhlů.

Věty:

V1 Velikost středového úhlu je rovna dvojnásobku velikosti obvodového úhlu příslušného k témuž oblouku.

V2 Všechny obvodové úhly příslušné k témuž oblouku jsou shodné.

V3 Obvodový úhel příslušný k menšímu oblouku je ostrý, k většímu oblouku tupý a k půlkružnici pravý. Obvykle ve znění **Thaletovy věty**: Všechny úhly nad průměrem kružnice jsou pravé.

Kružnice a kruh, úhly v kružnici – úlohy

1) Jak se změní středový úhel, jestliže se příslušný obvodový úhel

a) zmenší dvakrát
výpočet :

Středový úhel se ……………………………..

b) zvětší o 15°
výpočet :

Středový úhel se …………………………………

c) zmenší o 30^0
výpočet :

Středový úhel se ……………………………

2) Jak se změní obvodový úhel, jestliže se příslušný středový úhel

a) zvětší třikrát
výpočet :

Obvodový úhel se …………………………

b) zmenší o 40°
výpočet :

Obvodový úhel se ……………………………

3) Určete velikost obvodového úhlu příslušného k oblouku, jehož délka je

a) $\frac{3}{5}$ délky kružnice b) $\frac{5}{8}$ délky kružnice.

4) Vypočítejte velikost vnitřních úhlů v trojúhelníku, který vznikne na ciferníku hodin spojením cifer 1,5,8.

obrázek: zakreslete a označte příslušné dvojice středových a obvodových úhlů

Obsahy a obvody rovinných útvarů - teorie

Obrazec je rovinný útvar ohraničený uzavřenou čarou, která je částí obrazce.
Obvod o je délka čáry, která ho ohraničuje.
Obsah S je kladné číslo, přiřazené geometrickému obrazci tak, že platí:

- shodné obrazce mají sobě rovné obsahy
- skládá-li se obrazec z několika obrazců, které se nepřekrývají, rovná se obsah součtu jejich obsahů
- obsah čtverce o straně 1 má obsah 1 j^2

Přehled vzorců

obrazec	obvod	obsah
čtverec	$4a$	a^2
obdélník	$2(a+b)$	ab
kosočtverec	$4a$	av_a $\frac{ef}{2}$
kosodélník	$2(a+b)$	$av_a = bv_b$
lichoběžník	$a+b+c+d$	$\frac{(a+c)\cdot v}{2}$
trojúhelník	$a+b+c$	$\frac{zv}{2}$
pravidelný n-úhelník	na	$\frac{na\rho}{2} = \frac{o\rho}{2}$
kruh	$2\pi r$	πr^2

Obsahy a obvody rovinných útvarů - úlohy

1) Určete rozměry obdélníkového pozemku, je-li jeho obvod 176 metrů a výměra 19 arů.

2) Určete cenu za spotřebu barvy na nátěr reklamního panelu tvaru kosočtverce se stranou délky 4,3 m, je-li poloměr kružnice vepsané 1,2 metru. Kruh je natřen žlutou barvou, jejíž cena je 85 Kč/kg, zbylá plocha je natřena modře a cena barvy je 75 Kč/kg . Na 1 m^2 nátěru spotřebujeme 0,7 kg barvy.

3) Určete cenu za vnitřní nátěr bazénu se svažujícím se dnem s nejmenší hloubkou 1 metr a největší hloubkou 3 metry, je-li délka bazénu 25 metrů a šířka 15 metrů. Za 1m^2 nátěru si firma účtuje Kč 80,-.

4) Anténní stožár je 24 metry vysoký. Je upevněn čtyřmi ocelovými lany zavěšenými 1,5 metru pod nejvyšším bodem stožáru a ukotveným na zemi ve vrcholech čtverce o straně 12 metrů. Stožár je vztyčen ve středu tohoto čtverce. Vypočítejte celkovou délku ocelových lan, jestliže na upevnění každého z nich je nutno přidat 1,1 metru lana.

5) Z kulatiny o průměru 40 cm se má vyrobit trám o maximálním čtvercovém průřezu. Jaká bude délka jeho hrany?

6) Pozemek na vodorovném terénu má tvar rovnoramenného lichoběžníku se základnami 75 a 103 metry. Rameno svírá s nejdelší stranou úhel 44°. Kolika hektolitry vody byl pozemek zavlažen při dešti se srážkami 8 mm na 1m^2?

7) Traktor oseje za hodinu 1,5 ha půdy. Za kolik hodin oseje pole tvaru pravoúhlého lichoběžníku se základnami 635 m a 554 m a delším ramenem 207 m?

8) Určete spotřebu pletiva na oplocení parcely tvaru kosočtverce, jsou-li vzdálenosti protějších rohů 42 m a 34 m . Na záhyby se počítá navíc 4 %.

9) Vypočítejte poloměr kruhové dráhy, kterou musí běžec oběhnout třikrát, aby uběhl 2 km.

10) Při zkušebním letu letěl pilot nejprve 450 km k severu, pak k východu a po určité době se v přímém směru vrátil na letiště. Jaká byla délka dráhy letu , byla-li velikost úhlu dráhy posledního a výchozího směru 52°?