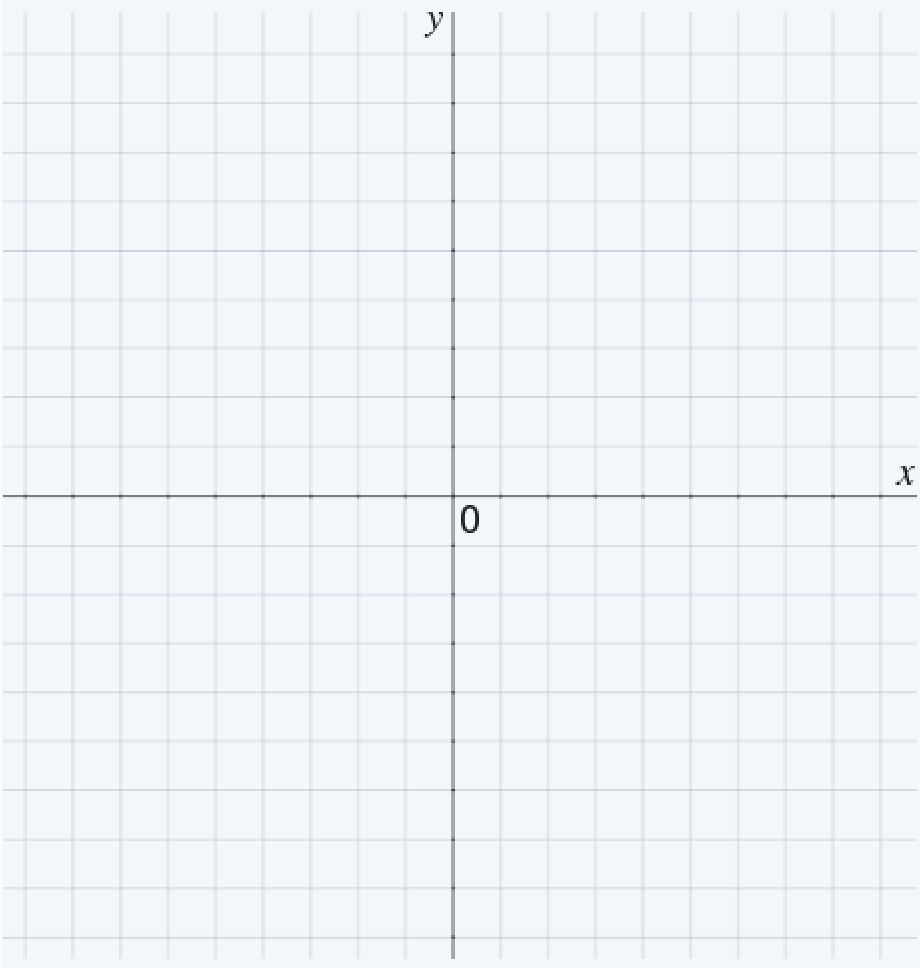
PŘÍMKA A JEJÍ VYJÁDŘENÍ
V ANALYTICKÉ GEOMETRII

V úvodu analytické geometrie jsme vysvětlili, že její hlavní snahou je popsat geometrické útvary (body, vektory, přímky, kružnice,...) pomocí čísel nebo proměnných. Jako prostředek k tomuto přechodu používáme soustavu souřadnic. Pak například zápis $A[2;1]$ určuje polohu bodu A vzhledem k bodu O a souřadnicovým osám. V následující kapitole nás čeká určení polohy přímky v soustavě souřadnic. Přímka se skládá z nekonečného počtu bodů, proto její vyjádření již bude muset obsahovat proměnné a nebudeme hovořit o souřadnicích přímky, ale o rovnici přímky. S jednou z takovýchto rovnic jsme se již seznámili v prvním ročníku. Tehdy jsme přímku chápali jako graf lineární funkce.

Př.1 Sestrojte graf funkce $p: y=2x+1$.



Celou situaci je ale možné chápat také obráceně a říct, že $p: y=2x+1$ je rovnicí přímky v rovině. Princip použití proměnné ve vyjádření přímky přitom spočívá v tom, že za x dosazujeme postupně různá reálná čísla. Těm odpovídají v rovnici čísla y, která s příslušnými x určují souřadnice bodů. Takto získané body leží na přímce p. Kdybychom dosadili za x všechna reálná čísla, vzniklé body by vytvořily celou přímku p.

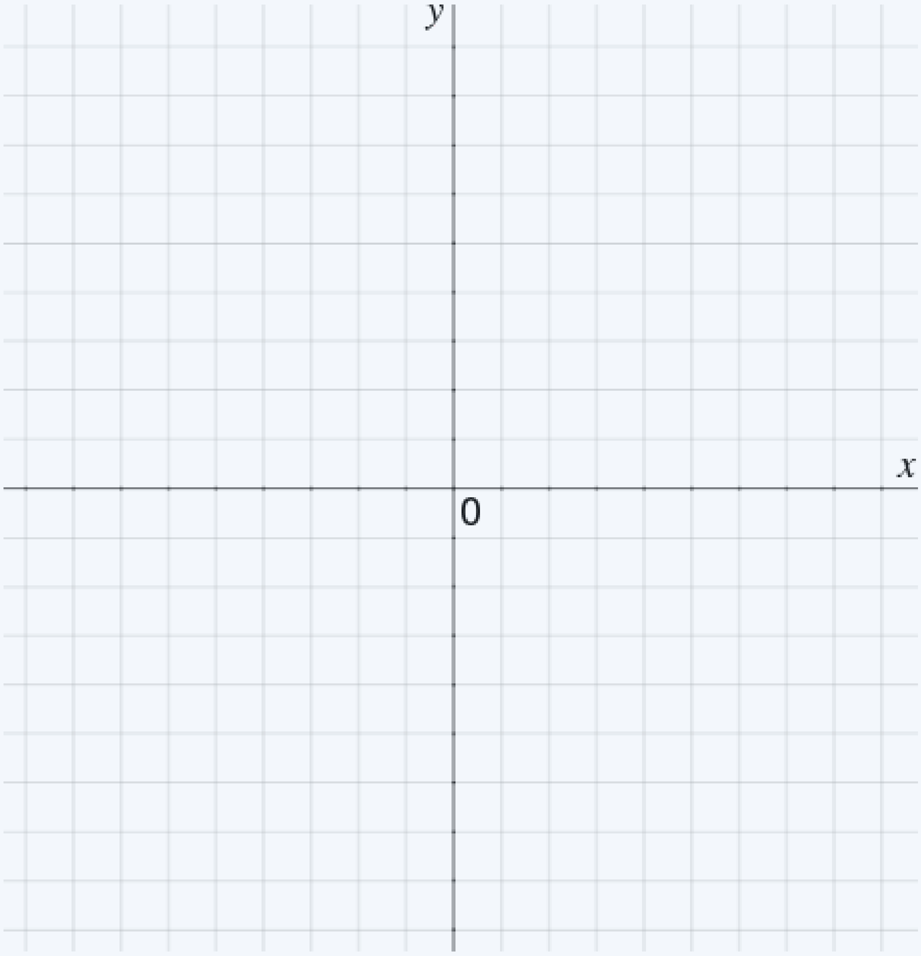
V analytické geometrii se setkáme se třemi způsoby vyjádření přímky:

a) parametrické vyjádření,
b) obecná rovnice,
c) směrnicový tvar rovnice přímky.

Parametrické vyjádření přímky

Chceme – li vyjádřit polohu přímky v soustavě souřadnic, je potřeba upřesnit její „směr“. K tomuto účelu můžeme použít vektor $\vec{s}$ rovnoběžný s přímkou p nazýváme směrový vektor přímky. Na první pohled je ale zřejmé, že vektor sám o sobě k jednoznačnému určení polohy přímky nestačí (existuje řada přímek rovnoběžných s určitým vektorem). Aby bylo určení jednoznačné, postačí, abychom jako součást zadání uvedli ještě jeden bod, kterým přímka prochází.

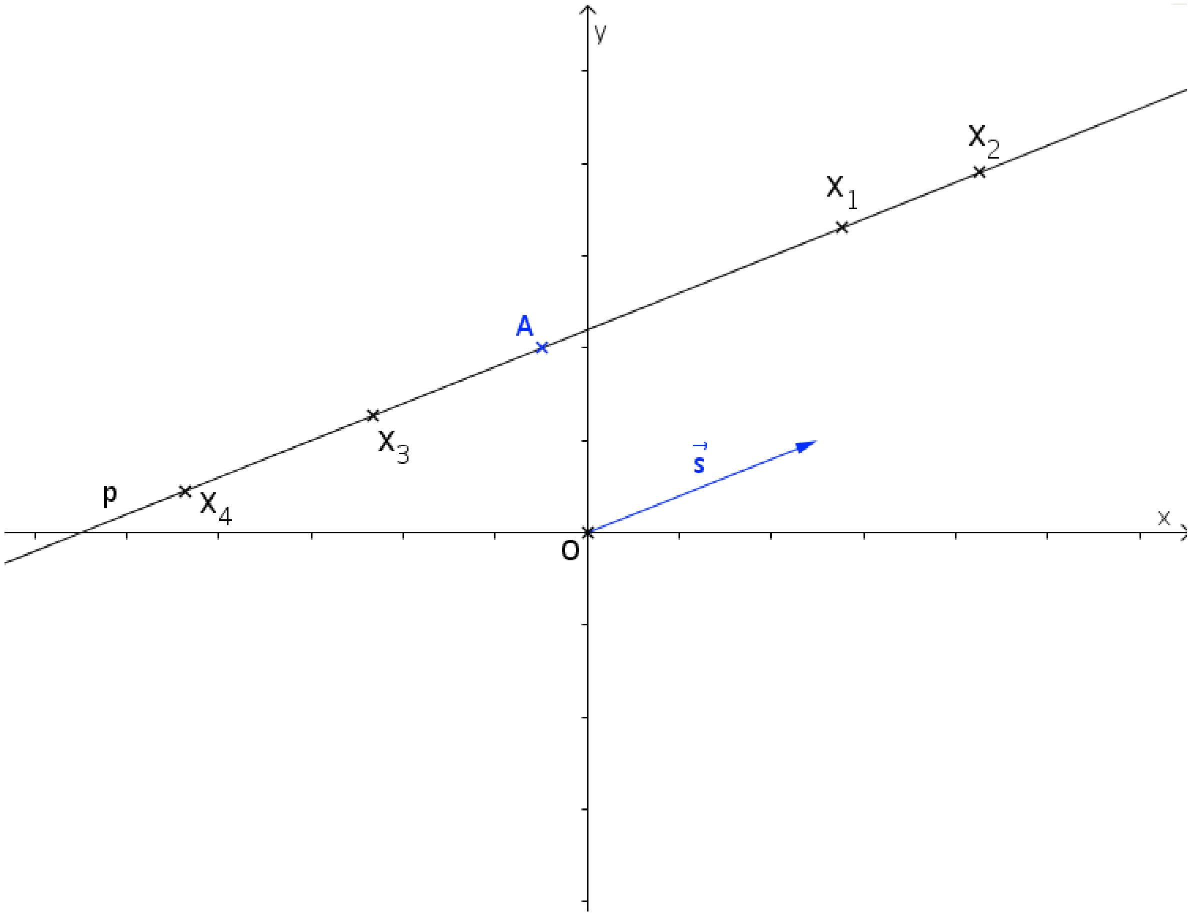
Př.2 Do připravené soustavy souřadnic zakreslete přímku p se směrovým vektorem $\vec{s}=(-3;5)$, která prochází bodem $A[6;2]$.



Z předchozího příkladu vidíme, že určení polohy přímky pomocí směrového vektoru a jednoho bodu je jednoznačné. Slovní zadání přímky je však pro většinu úkolů, které nás budou čekat, nepraktické. Pokusíme se tedy vyjádřit přímku pomocí rovnice. Bude se muset jednat o rovnici, která bude platit pro souřadnice libovolného bodu $X[x;y]$, který na přímce leží (a pro souřadnice bodů mimo přímku naopak platit nebude).

Na spodním obrázku je v soustavě souřadnic přímka p, zadaná směrovým vektorem $\vec{s}$ a bodem A. Na přímce je náhodně zvoleno několik bodů (X_1, X_2, X_3, X_4). Spolu s bodem A vytváří tyto body vektory. Bez ohledu na polohu bodu X můžeme říct, že vektor $\overrightarrow{AX}$ je

…………………………………………



Můžeme tedy psát: $$\overrightarrow{AX} = t\vec{s}$$

Chceme – li z dané rovnice vyjádřit bod X, použijeme na levé straně vztah pro výpočet souřadnic vektoru $\overrightarrow{AX}$.

$$= t\vec{s}$$

$$X =$$

Poslední rovnice platí pro libovolný bod přímky p a nazýváme ji parametrické vyjádření přímky p. Zpravidla tuto rovnici rozepisujeme pro jednotlivé souřadnic:

$$x = x_A + t s_x$$
$$y = y_A + t s_y ; t \in R$$

Danou rovnici můžeme použít i v prostoru, kde ji pouze rozšíříme o z – ovou souřadnici.

$$z = z_A + t s_z$$

Číslo t plní v těchto rovnicích funkci parametru. Znamená to, že dosazováním různých čísel za t budeme dostávat souřadnice různých bodů ležících na přímce p.

Př.3 Je dána přímka p: $x=7+3t$

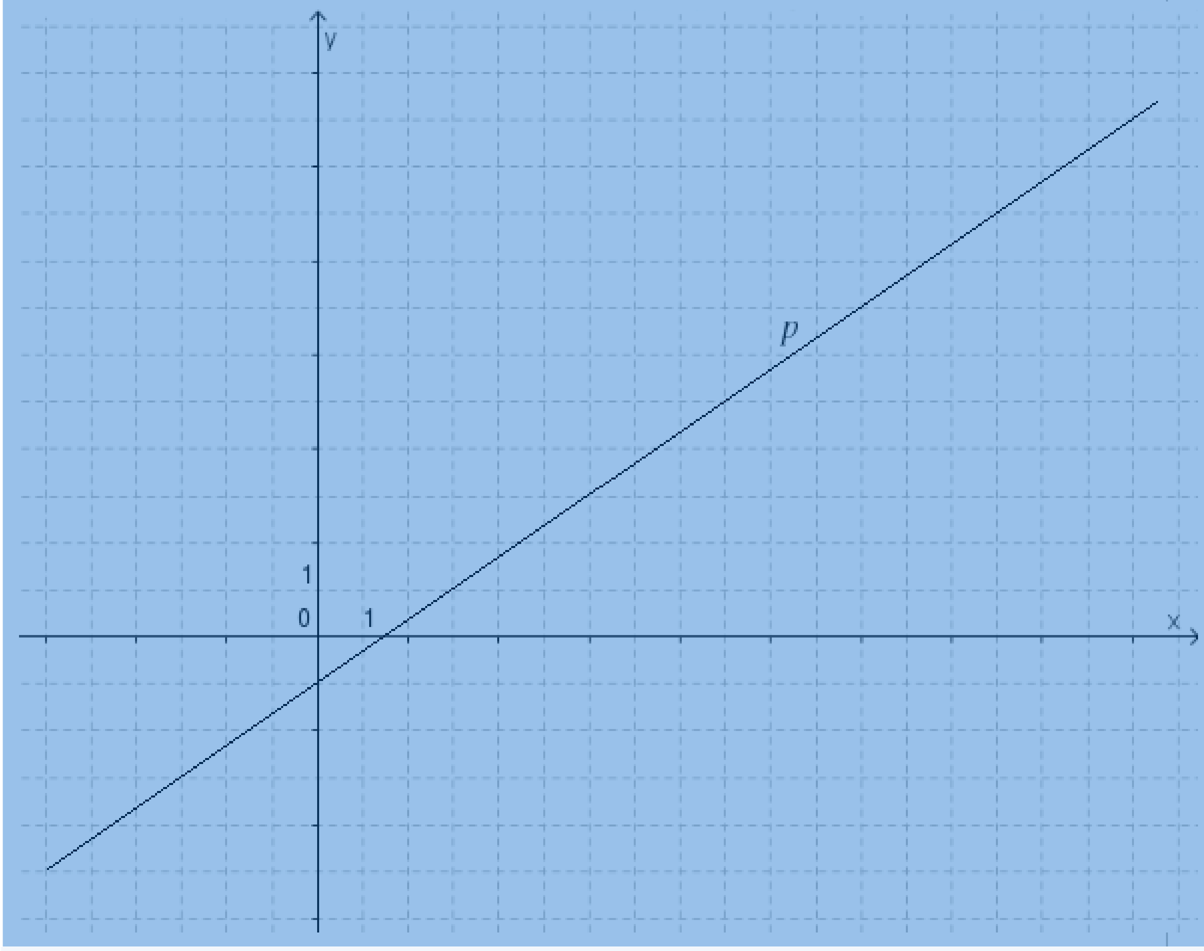
$y=2-4t;\ t\in R$.

a) Určete její směrový vektor a souřadnice bodu A, kterým přímka prochází a který byl použit v jejím zadání.

b) Vypište souřadnice několika dalších bodů přímky p. Za parametr t dosazujte například čísla $0;1;2;-2;\frac{1}{2}$.

Všechny zjištěné údaje zakreslete do připravené soustavy souřadnic.

Př.4 Zapište parametrické vyjádření přímky p na obrázku.



Př.5 Rozhodněte, zda body $M[5;3]; N\left[-\frac{31}{2};0\right]$ leží na přímce

$$p: \quad \begin{aligned} x &= -5+3t \\ y &= 7+2t;\ t \in R \end{aligned}\ .$$

Z geometrického hlediska lze také přímku zadat pomocí dvou navzájem různých bodů, kterými přímka prochází. Jednou ze základních dovedností, které je potřeba zvládnout u každého způsobu zadání přímky, je zapsání rovnice přímky procházející dvěma body.

Př.6 Zapište parametrické vyjádření přímky procházející body $A[2;5]; B[-2;9]$.

Při řešení řady geometrických problémů budeme potřebovat vést určitým bodem s přímkou rovnoběžku, případně vést z určitého bodu k přímce kolmici. Zvládnutí těchto dovedností nám později umožní počítat vzdálenost bodu od přímky, určovat obsah rovinných obrazců apod.

Př.7 Bodem $K[3;-8]$ veďte přímku q rovnoběžnou s přímkou p: $x=3-4t$
$y=5t; t\in R$.

Př.8 Z bodu $L[0;-1]$ veďte přímku q kolmo na přímku p: $x=3-2t$
$y=7+7t; t\in R$.

Obecná rovnice přímky

Od parametrického vyjádření se liší tím, že neobsahuje parametr *t*. Máme – li k dispozici parametrické vyjádření přímky, můžeme obecnou rovnici získat vyloučením parametru *t*. Celý postup si vyzkoušíme na následujícím příkladu.

Př.9 Z parametrického vyjádření přímky p: $x=3-2t$
$y=7+7t;t\in R$ vylučte parametr *t*.

Každou přímku *p* v rovině je tedy možné vyjádřit rovnicí tvaru

$$ax+by+c=0;a,b,c\in R \quad ,$$

kde alespoň jedno z čísel *a*, *b* je různé od nuly. Tuto rovnici nazýváme obecnou rovnicí přímky.

Př.10 Koeficienty *a*, *b* v obecné rovnici přímky určují souřadnice jistého vektoru $\vec{n}$. Zapište souřadnice tohoto vektoru u přímky v minulém příkladu a zjistěte, jaký je vztah vektoru $\vec{n}$ k přímce *p*.

Abychom se přesvědčili, že zjištěná skutečnost není náhodná provedeme převod parametrického vyjádření na obecnou rovnici přímky ještě jednou, tentokrát obecně.

Př.11 Parametrické vyjádření přímky p: $x = x_A + t\,s_x$
$y = y_A + t\,s_y \,;\, t \in R$ převeďte na obecnou rovnici vyloučením parametru t.

Vidíme, že pro souřadnice vektoru $\vec{n}$ obecně platí $\vec{n} = (\quad ; \quad)$. Určíme – li skalární součin vektorů

$$\vec{n} \cdot \vec{s} = \qquad\qquad\qquad ,$$

zjišťujeme, že vektory $\vec{n}$ a $\vec{s}$ jsou kolmé vždy.

Můžeme tedy říci, že koeficienty a, b v obecné rovnici přímky určují souřadnice vektoru $\vec{n} = (a\,;b)$, který je k dané přímce kolmý a nazývá se normálový vektor přímky. Této skutečnosti je možné využít k nalezení obecné rovnice přímky bez vyloučení parametru t.

Př.12 Nalezněte obecnou rovnici přímky p: $x = -5 + 4t$
$y = 1 - 5t \,;\, t \in R$ pomocí normálového vektoru.

Př.13 Nalezněte obecnou rovnici přímky p procházející body $A[7;-2], B[1;-6]$.

Př.14 Nalezněte obecnou rovnici osy o úsečky KL. $K[-3;-2], L[7;0]$.

Náčrt:

Př.15 Přímka p je dána obecnou rovnicí p: $5x-6y+3=0$. Nalezněte její parametrické vyjádření.

Př.16 Z bodu $K[-1;-5]$ veďte kolmici q k přímce p: $x+3y-1=0$.

V závěru tohoto odstavce si ještě vysvětleme, co pro rovnici přímky znamená, jestliže v obecné rovnici jedna z proměnných chybí.

Př.17 Do připravené soustavy souřadnic sestrojte přímky $p: x+2=0$ a $q: y-4=0$.

Přímky p a q je také možné přepsat do tvaru $p: x=-2$ a $q: y=4$. Obecně pak můžeme říci že:

a) přímka p o rovnici $p: x=m$ je ....
a číslo m určuje její ....

b) přímka q o rovnici $q: y=n$ je ....
a číslo n určuje její ....

Př.18 Bodem $M[5;-1]$ veďte přímky p a q po řadě rovnoběžné se souřadnicovými osami.

Směrnicový tvar rovnice přímky

Směrnicový tvar rovnice přímky získáme z obecné rovnice vyjádřením proměnné *y*.

Př.19 Přímka *p* je dána obecnou rovnicí $p: 5x - 4y + 10 = 0$. V uvedené rovnici vyjádřete *y*.

Můžeme tedy říct, že každou přímku *p* v rovině, která není rovnoběžná s osou *y* je tedy možné vyjádřit rovnicí tvaru

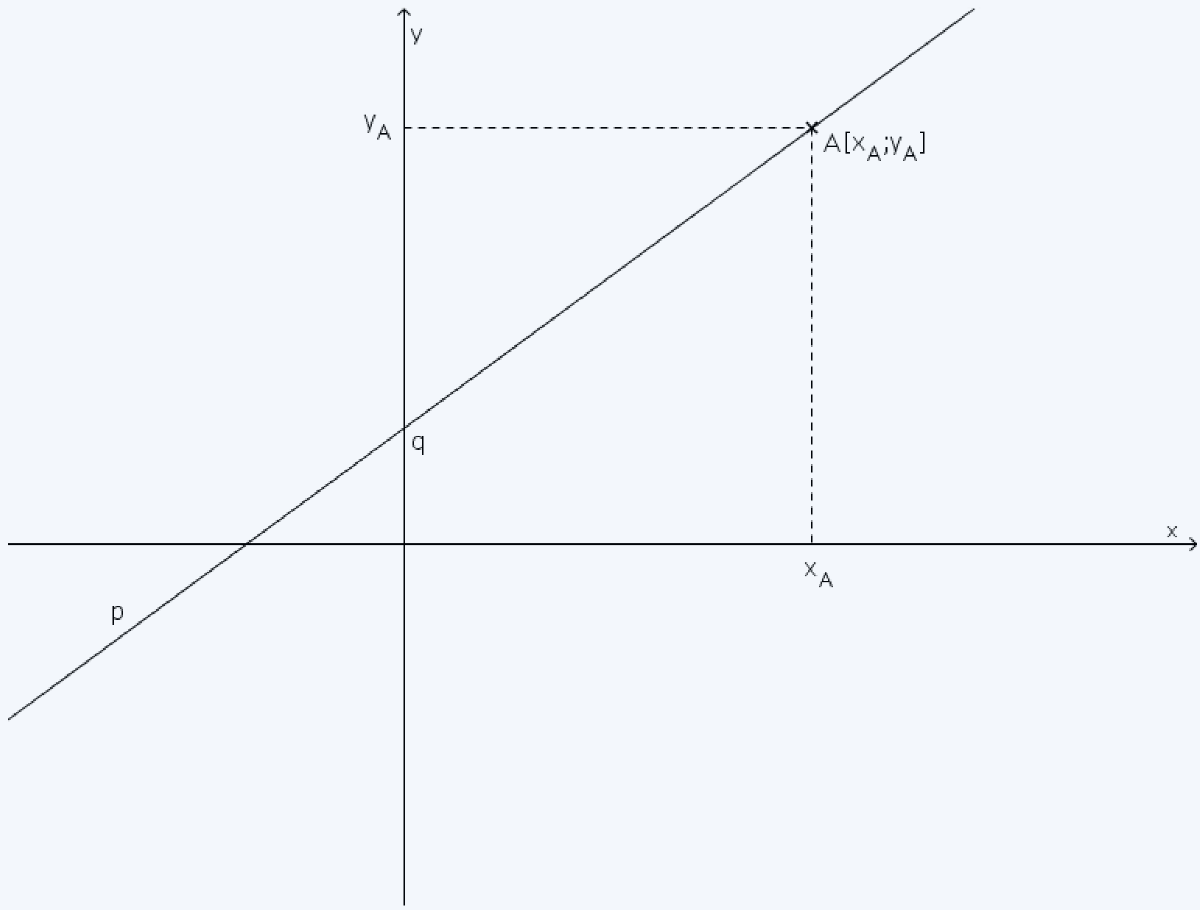
$$y = kx + q\,;\, k, q \in R \quad .$$

Číslo *k* se nazývá směrnice a celé vyjádření nazýváme směrnicový tvar rovnice přímky. Čísla *k* a *q* přitom mají jistý geometrický význam, který si ukážeme na následujících úkolech:

Př.20 U přímky $p: y = kx + q$ určete souřadnice jejího průsečíku s osou *y*.

Můžeme tedy říct, že číslo *q* ve směrnicovém tvaru rovnice přímky nám určuje souřadnice průsečíku přímky s osou *y*.

Př.21 Vyberme libovolný bod $A[x_A; y_A]$ ležící na přímce $p: y=kx+q$. Vyjádřete směrnici k pomocí souřadnic tohoto bodu a s pomocí připraveného obrázku vysvětlete geometrický význam směrnice k.



Můžeme tedy říct, že směrnice určuje ....

....

a píšeme $k=$

Pozn.: Směrnicový tvar rovnice přímky nachází využití zejména v diferenciálním počtu, kde pomocí derivace určujeme směrnici tečny ke grafu v libovolném bodě a vlastně tak vyšetřujeme sklon křivky.

Se směrnicovým tvarem je výhodné pracovat v úlohách týkajících se směrového úhlu.

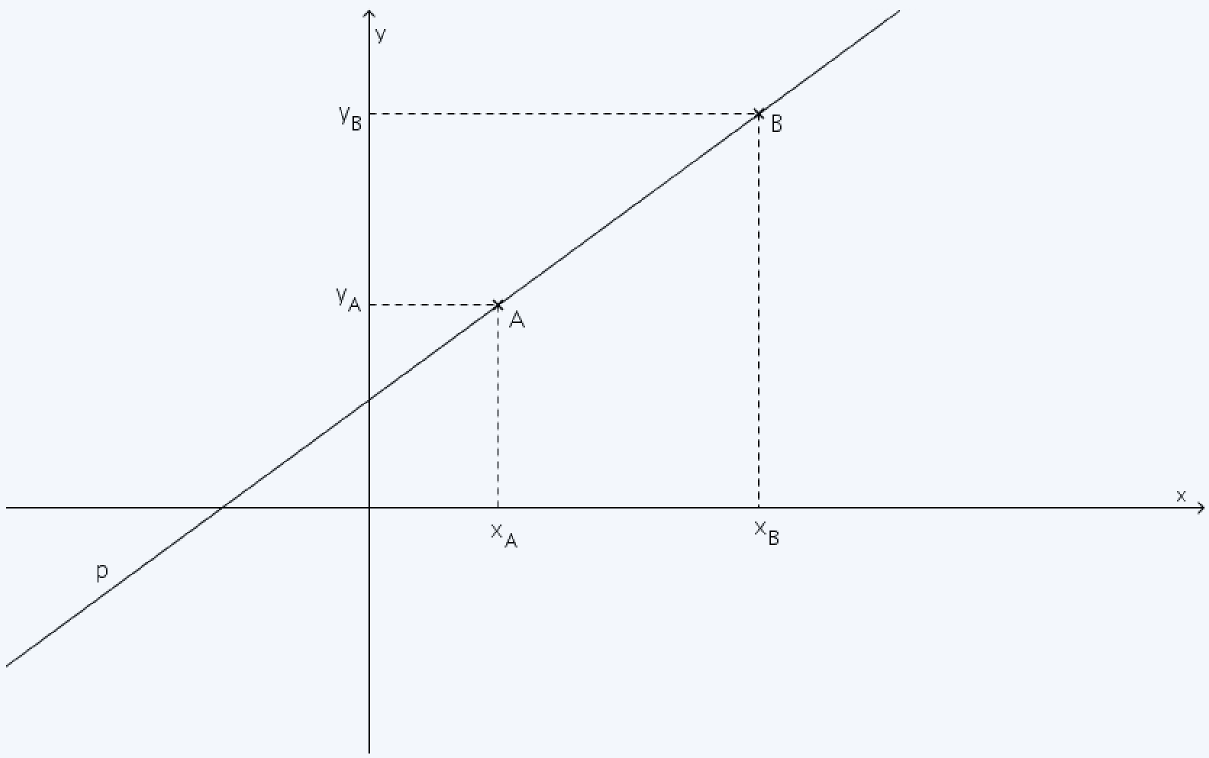
Př.22 U přímky $p: y = -\frac{4}{3}x + \frac{7}{3}$ určete souřadnice průsečíků se souřadnicovými osami a směrový úhel.

Př.23 Zapište rovnici přímky *p* se směrovým úhlem 135^0, která prochází bodem $A[-3-2]$.

Př.24 Zapište směrnicový tvar rovnice přímky procházející body $A[-2;6], B[-1;-4]$.

1.způsob: přes obecnou rovnici

2.způsob: přes směrnici



Př.25 Určete směrový vektor přímky $p: y = -\frac{2}{5}x + \frac{1}{20}$.