POSLOUPNOSTI

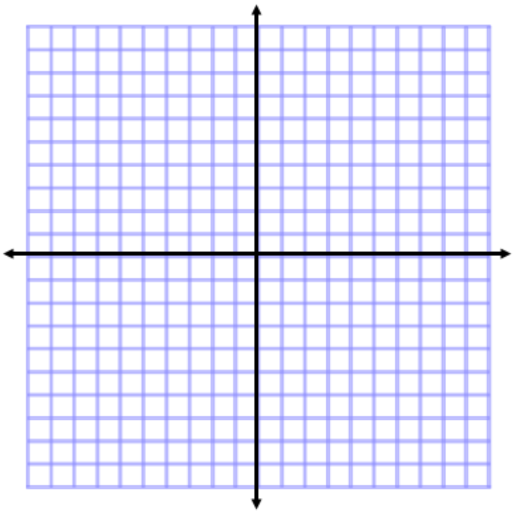
Základní pojmy:

- Definice posloupnosti
- Vlastnosti posloupnosti
- Určení posloupnosti
- Aritmetická posloupnost
- Geometrická posloupnost
- Užití posloupnosti

---

1. Definice posloupnosti

Př. Sestrojte graf funkce y = 2.x pro x∈{1,2,3,4,5}



D =
H =

Každá funkce, jejímž definičním oborem je množina N všech přirozených čísel, se nazývá **posloupnost**.

Každé číslo posloupnosti má své pořadí (index) n∈N a hodnotu $a_n \in R$:

1. člen posloupnosti ... a_1
2. člen posloupnosti ... a_2
3. člen posloupnosti ... a_3
...
n. člen posloupnosti ... a_n

2. Vlastnosti posloupnosti

Je-li počet prvků neomezený - ***nekonečná posloupnost***. př:

Je-li počet prvků omezený - ***konečná posloupnost***. př:

Příklady:

1. Zapiš prvních 6 členů posloupnosti:

$$a_n = 4 - 2.n$$

$$a_n = \frac{3}{4} + (-1)^n . \frac{3}{4}$$

$$a_n = 2^{|n-2|}$$

2. Výčtem všech členů urči posloupnost $(a_n)_{n=1}^{5}$

$$a_n = \frac{n^2}{2} - 6$$

$$a_n = n^2 - 4.n + 1$$

$$a_n = (-1)^n$$

$$a_n = \frac{2}{2^n + 2}$$

3. Najdi vzorec pro n-tý člen posloupnosti a urči následující dva členy posloupnosti:

$$0,2,4,6,8,\ldots$$

$$0,1,0,1,0,1,\ldots$$

$$\frac{1}{1.2},\frac{2}{2.3},\frac{3}{3.4},\ldots$$

$$1,\frac{3}{2},\frac{9}{4},\frac{27}{8},\ldots$$

$$-1,1,3,5,7,\ldots$$

$$-1,1,-1,1,-1,\ldots$$

$$-1,-1,-1,-1,-1,\ldots$$

$$1,8,27,64,125,\ldots$$

4. Vypočti a_2, a_3, a_{n+1}, a_{n+3}

$$a_n = -2.n + 3$$

$$a_n = 2.3^{n-1}$$

$$a_n = 7.\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$a_n = (-1)^n.\frac{1}{n+1}$$

---

3. Monotónnost posloupnosti

Posloupnost je ***rostoucí***, pokud pro všechna *i* platí $a_n < a_{in+1}$
klesající, pokud pro všechna *i* platí $a_n > a_{n+1}$,

př. $a_n = 2.n$

2, 4, 6, 8, 10, ... roste důkaz:

$a_1 < a_2$
$a_2 < a_3$
$a_3 < a_4$
...
$a_n < a_{n+1}$ ... **rostoucí posloupnost**

př. $a_n = - 2.n$

-2, -4, -6, -8, -10, ... klesá důkaz:

$a_1 > a_2$

$a_2 > a_3$

$a_3 > a_4$

...

$a_n > a_{n+1}$ ... **klesající posloupnost**

Příklady:

Urči monotónnost posloupnosti:

$a_n = 2.n + 2$

$a_n = (-1)^n$

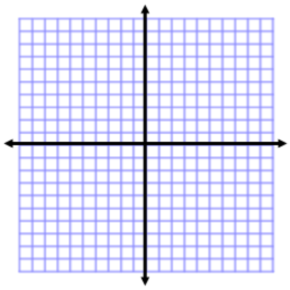
$a_n = -2.n + 3$

$a_n = \frac{n-3}{n}$

---

4. Určení posloupnosti

1. výčtem prvků $\{2,4,6,8,10...\}$
2. vzorcem pro n-tý člen $a_n = 2.n$
3. graficky



4. <u>rekurentně</u> $a_{n+1} = 2.a_n, a_1 = 2$

Rekurentní vzorec posloupnosti vyjadřuje její *(n+1)* člen pomocí jednoho nebo několika členů předchozích.
Aby bylo jednoznačné - musíme doplnit o **počáteční podmínky** (tj. zadat hodnotu jednoho nebo více členů).

Příklady:

1. Určete prvních pět členů posloupnosti, která je dána rekurentním vzorcem
$a_{n+1} = 2.a_n - 1$ a počátečními podmínkami $a_1 = 1$

2. Určete prvních pět členů posloupnosti, která je dána rekurentně:

$a_1 = -2, a_{n+1} = a_n + 1$

$a_1 = \frac{1}{10}, a_{n+1} = \frac{1}{a_n}$

$a_1 = 3, a_{n+1} = -2a_n$

$a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{a_n + 1}$

$a_1 = -1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$

$a_1 = 2, a_2 = 3, a_{n+2} = a_n^2 - a_{n+1}$

$a_1 = 2, a_2 = 1, a_{n+2} = \frac{3a_{n+1} - a_n}{2}$

3. Určete rekurentní vzorec posloupnosti, která je určena vzorcem pro n-tý člen

   $a_n = n + 2$

   2 způsoby: $a_n = n + 2, a_{n+1} = (n+1) + 2 = n + 3$

4. Určete rekurentní vzorec posloupnosti, která je určena vzorcem pro n-tý člen

$a_n = \frac{n+1}{n}$

$a_n = (1)^n$

$a_n = (-1)^n$

$a_n = 1 - n$

---

5. Aritmetická posloupnost

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá ***aritmetická*** právě tehdy, když rozdíl každých 2 po sobě jdoucích členů je konstantní.

$$a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 6, a_4 = 8, a_5 =$$

Rozdíl 2 po sobě jdoucích členů se nazývá ***diference*** ***d*** aritmetické posloupnosti, ***d∈R***

$$\left.\begin{array}{l} a_2 - a_1 = 2 \\ a_3 - a_2 = 2 \\ a_4 - a_3 = 2 \\ \dots \\ a_{n+1} - a_n = 2 \end{array}\right\} d = 2 \Rightarrow d = a_{n+1} - a_n$$

$$\boxed{\forall n \in N : a_{n+1} = \qquad\qquad}$$

A platí:

$$\left.\begin{array}{l} a_2 = a_1 + d \\ a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d \\ a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d \\ \dots \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$$

Obecně platí: $\boxed{a_n = a_r + (n-r).d}$

Příklady:

1. Napiš prvních 5 členů aritmetické posloupnosti, je-li
   - **a.** $a_1 = 2, d = 3$
   - **b.** $a_1 = 0{,}5, d = 3$
   - **c.** $a_1 = -3, d = 0{,}4$
   - **d.** $a_3 = \sqrt{2}, a_4 = \frac{3.\sqrt{2}}{2}$
   - **e.** $a_3 = 8, a_5 = 2$
   - **f.** $a_8 = -64, a_{10} = -50$
2. Urči prvních 6 členů posloupnosti a dokaž, že je to AP:
   - **a.** $\{n+2\}$
   - **b.** $\{3n-2\}$
   - **c.** $\{-2n+4\}$
   - **d.** $\left\{\frac{5}{3}n - \frac{3}{2}\right\}$
3. Rozhodni, zda čísla 71 a 100 jsou členy AP, v níž je $a_1 = -10, d = 4{,}5$
4. V AP je dáno:
   - **a.** $a_1 = -6, d = \frac{2}{3}, a_7, a_{16}, a_{100} = ?$
   - **b.** $a_3 = -\frac{5}{3}, a_8 = \frac{2}{3}, a_1, d = ?$
   - **c.** $a_{47} = 74, a_{74} = 47, a_1, d = ?$
   - **d.** $a_1 + a_7 = 42, a_{10} - 21 = a_3, a_1, d = ?$
   - **e.** $a_2 + a_4 = 10, a_5 = 9, a_1, d, a_{15} = ?$
   - **f.** $a_1 + a_5 = 24, a_2.a_3 = 60, a_1, a_3 = ?$
   - **g.** $a_2 + a_4 = 7, a_6 + a_8 = 23, a_3 + a_7 = ?$
   - **h.** $a_2 + a_5 - a_3 = 10, a_1 + a_6 = 17, a_1, d = ?$
   - **i.** $a_1 + a_5 = 14, a_1.a_9 = 36, a_1, d = ?$

Pro součet prvních *n* členů AP platí: $\boxed{s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)}$

Příklady:

1. Vypočtěte součet všech členů konečné AP:
   a. 1, 2, 3, 4, 5, ….., 100 ***b.*** 36, 34, 32, …., -2, -4 ***c.*** $\frac{1}{5},0,-\frac{1}{5},....,-\frac{14}{5}$
2. Vypočtěte hledané hodnoty
   a. ***a_1 = 6, a_{12} = 28, s_{12} = ?***
   b. ***a_1 = 7, n = 25, s_n = 325, d = ?, a_{25} = ?***
   c. ***a_n = 47, d = 5, s_n = 245, n = ?, a_1 = ?***
   d. ***a_1 = 14, d = -3, a_n = -1, n = ?, s_n = ?***
   e. ***s_{14} = 161, n = 14, d = 1, a_1 = ?, a_n = ?***
3. Mezi čísla 3/2 a 5 vlož 6 čísel tak, aby vznikla AP.
4. Mezi čísla -5 a 4 vlož čísla tak, aby vznikla AP se součtem -6,5. Urči počet nových členů.
5. Mezi čísla 8 a 20 vlož tolik členů AP tak, aby byl jejich součet 196.
6. Dělník vyrobí za směnu 26 součástek. Kdyby zvyšoval svůj výkon denně o 1 součástku, kolik součástek by vyrobil za 18 dni?
7. Železné roury jsou srovnány v 10-ti řadách nad sebou tak, že vrchní řada má 15 trubek a každá další řada o 1 více. Kolik je všech trubek dohromady?
8. Teplota Země přibývá o 1°C na 33 m hloubky. Jak veliká je teplota v šachtě hluboké 1256 m, je-li v hloubce 25 m stálá teplota +9°C?
9. Studenti si na jednodenní brigádě vydělali dohromady 2700 Kč. První vydělal 400 Kč a každý další o 25 Kč méně než předchozí. Kolik bylo studentů?
10. V AP 30, 27, 24, ... najděte člen, který se rovná osmině všech předcházejících členů.
11. Část střechy domu má tvar lichoběžníku a je třeba ji pokrýt taškami. Víme, že do řady u hřebenu se vejde 85 tašek, do spodní řady při okapu 102 tašek. Tašky jsou rovnány tak, že v každé řadě je o 1 tašku méně (více), než v řadě předchozí. Kolik tašek je třeba na pokrytí této části střechy?

6. Geometrická posloupnost

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá ***geometrická*** právě tehdy, když podíl každých 2 po sobě jdoucích členů je konstantní.

$$a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 8, a_4 = 16, a_5 =$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a_2}{a_1} = 2 \\ \frac{a_3}{a_2} = 2 \\ \frac{a_4}{a_3} = 2 \\ \dots \\ \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2 \end{array}\right\} q = 2 \Rightarrow q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Podíl 2 po sobě jdoucích členů se nazývá ***kvocient q*** geometrické posloupnosti, ***q∈R***

$$\boxed{\forall n \in N : a_{n+1} = \qquad}$$

A platí:
$$\left.\begin{aligned} a_2 &= a_1.q \\ a_3 &= a_2.q = a_1.q.q = a_1.q^2 \\ a_4 &= a_3.q = a_1.q^2.q = a_1.q^3 \\ &\ldots \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{a_n = a_1.q^{n-1}}$$

Obecně platí: $\boxed{a_n = a_r.q^{n-r}}$

Příklady:

1. Napiš prvních 5 členů GP, je-li
   - ***a.*** ***$a_1 = 2$, $q = 2$***
   - ***b.*** ***$a_1 = 3$, $a_2 = 3/2$***
   - ***c.*** ***$a_2 = -1$, $a_4 = -1/4$***
   - ***d.*** ***$a_3 = 8$, $a_5 = 81$***
   - ***e.*** ***$a_2 - a_1 = 15$, $a_3 - a^2 = 60$***
2. Znázorni graficky prvních 5 členů GP, jejíž první dva členy jsou
   - ***a.*** ***1, 3***
   - ***b.*** ***-16, -8***
3. Urči vzorec pro n-tý člen GP
   - ***a.*** 32, 48, 72, 108, 162, 243
   - ***b.*** 3, -4, 16/3, -64/9
   - ***c.*** -2, 4, -8
4. Zjisti zda číslo 1458 je členem GP 2, 6, 18, ...
5. Urči pořadí podtrženého členu GP
   - ***a.*** 8, 16, 32, ..., <u>512</u>, ...
   - ***b.*** -1, 2, -4, ..., <u>128</u>
6. Vypište hledané hodnoty
   - ***a.*** ***$a_1 = -126$, $q = -1/3$, $a_5 = ?$***
   - ***b.*** ***$a_2 = -1$, $a_5 = 1/64$, a_1, $q = ?$***
   - ***c.*** ***$a_6 = 8192$, $q = 4$, $a_4 = ?$***
   - ***d.*** ***$a_1 = 5$, $a_7 = 320$, q, $a_{10} = ?$***
   - ***e.*** ***$a_3 = -\sqrt{20}$, $a_4 = 10$, a_1, $a_2 = ?$***
   - ***f.*** ***$a_1 + a_3 = 5$, $a_2 + a_4 = 10$, q, $a_1 = ?$***
   - ***g.*** $\dfrac{a_1 + a_4}{a_2 + a_3} = \dfrac{7}{3}, a_1 - 48 = a_2, a_1, q = ?$

Pro součet prvních *n* členů GP platí:
$$\boxed{\begin{aligned} q = 1 &\Rightarrow s_n = n.a_1 \\ q \neq 1 &\Rightarrow s_n = a_1.\frac{q^n - 1}{q - 1} \end{aligned}}$$

Příklady:

1. Urči součet prvních n-členů GP, je-li
   - ***a.*** ***$a_1 = 3$, $q = -2$, $n = 5$***
   - ***b.*** ***$a_1 = -4$, $q = 1$, $n = 10$***
   - ***c.*** ***1, 3, 9, 27, ... $n = 6$***
   - ***d.*** $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots. n = 4$
2. Vypočti hledané hodnoty, je-li
   - ***a.*** $a_1 = 5, a_n = 2560, s_n = 5115, n, q = ?$
   - ***b.*** $a_1 = 1, a_n = 2401, s_n = 2801, n, q = ?$
   - ***c.*** $a_1 = 8, q = 2, s_n = 4088, n, a_n = ?$
   - ***d.*** $a_1 + a_3 = -6, s_4 = 20, a_1 \ldots a_4 = ?$
   - ***e.*** $a_3 - a_1 = 24, a_5 - a_1 = 624, s_6 = ?$
   - ***f.*** $a_5 = 16, a_8 = 128, a_7, s_7 = ?$
3. Mezi čísla 5 a 320 vložte 5 a 320 vložte 5 čísel, aby vznikla GP.

4. Která GP má tu vlastnost, že součet prvních 8 členů je 82 krát větší než součet prvních 4 členů.

7. Užití GP

Vzorec pro užití GP v praxi:

pravidelný růst

$$\boxed{a_n = a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n}$$

pravidelný pokles

$$\boxed{a_n = a_0 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n}$$

a_0 .... počáteční hodnota
a_n...................... hodnota po n – letech
n................ počet roků
p................ počet procent, o které se hodnota každoročně zvyšuje (resp. klesá)

Základní úlohy:

1. přírůstek (pokles) počtu obyvatel, nárůst výroby

Příklad:
Ve městě žije 250 000 obyvatel. Kolik zde bude žít obyvatel za 10 let, jestliže se předpokládá, že pravidelný roční přírůstek je 1,5 %?
Řešení:

Počet obyvatel na počátku	$a_0 = 250\ 000$
Počet let	$n = 10$
Pravidelný přírůstek	$p = 1{,}5\ \% = 0{,}015$
Částka po 10 letech:	$a_{10} = ?$

Počet obyvatel roste $a_n = a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n =$

Bude zde žít obyvatel.

2. konta v bance, spoření

Příklad:
Jakou částku získáme za 10 let, uložíme-li na vkladový list 100 000,- Kč při ročních úrocích 8 %?
Řešení:

Vklad na počátku	$a_0 = 100\ 000$
Počet let	$n = 10$
Úrok	$p = 8\ \% = 0{,}08$
Částka po 10 letech:	$a_{10} = ?$

Částka roste $a_n = a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n =$

Získáme částku Kč .

Příklad:
Do peněžního ústavu vkládáme na počátku každého roku částku a_0. Vklad je každoročně úročen p procenty. Kolik budeme mít naspořeno na počátku n. roku i s dalším vkladem?

$$\boxed{s_n = a_0 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}, q = \left(1 + \frac{p}{100}\right)}$$

Pan Novák pravidelně na počátku každého roku ukládá na vkladní knížku 5 000, - Kč. Vkladní knížka se každoročně úročí 6 procenty. Kolik bude mít naspořeno na začátku 15. roku (i s novým vkladem)?

Řešení:

Každoroční vklad	$a_0 = 5\,000$
Počet let	$n = 15$
Úrok	$p = 6\,\% = 0{,}06$
Naspořená částka po 15 letech:	$s_{15} = ?$

$$q = \left(1 + \frac{p}{100}\right) = 1{,}06, s_n = a_0 . \frac{q^n - 1}{q - 1} =$$

Na počátku 15. roku bude mít pan Novák naspořeno Kč.

3. odpisy materiálu

Příklad:

Do podniku byl zakoupen stroj v hodnotě 400 000,- Kč. Z ceny stroje se každoročně odepisuje 15 %. Jaká bude hodnota stroje za 12 let?

Řešení:

Cena na počátku	$a_0 = 400\,000$
Počet let	$n = 12$
Odpis	$p = 15\,\% = 0{,}15$
Cena po 12 letech:	$a_{12} = ?$

Cena klesá $a_n = a_0 . \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n =$

Cena stroje po 12 letech bude činit Kč.

Příklady:

1. Město má 30 000 obyvatel. Jejich počet se každoročně zvyšuje o 1,75% . Určete počet obyvatel města za 15 let. [38 917]
2. Město má 50 000 obyvatel. Před 20 lety jich bylo 35 000. Kolik obyvatel bude ve městě za dalších 10 let, nezmění-li se průměrný přírůstek počtu obyvatelstva? [59 761]
3. Na jakou hodnotu se sníží výrobní náklady výrobku za 5 let, jestliže se každoročně sníží o 6 % a jestliže původní výrobní náklady byly 2 500 Kč? O kolik % se sníží vzhledem k původním nákladům? [1835 Kč, 26,6%]
4. Jaká byla cena nového stroje, jestliže se každoročně odepisuje 10% ceny stroje. Po 13 letech měl hodnotu 10 168. [40 000]
5. Pan Kovář si uložil na vkladový list částku 50 000,- Kč. Určete, na kolik tato částka vzroste za 10 let, úročí-li se 5% ročně. [81 445]
6. Kolik let potřebujeme, abychom našetřili 120 000 Kč, jestliže počátkem každého roku vložíme částku 10 000 Kč? Předpokládaný úrok je 5 %. [9,26 roku]
7. Pan Kovář si uložil na vkladový list částku 50 000,- Kč. Určete, na kolik tato částka vzroste za 10 let, úročí-li se 5% ročně a na konci každého roku se z úroků strhává 15% daň. [75 811]
8. Určete, jakou částku musí paní Bílá uložit,aby při 5% úroku měla naspořeno za 15 let 100 000 Kč.(z úroků neplatí daň) [48 102]
9. Pan Šetřílek si ukládá počátkem každého roku 5000,- Kč. Určete, jakou částku bude mít na konci 15. roku při úrocích 4% . [99 026]
10. Stroj ztrácí opotřebováním každoročně 10% své původní ceny . Určete po kolika letech klesne jeho cena na polovinu. [6,5]
11. Množství dřeva v lese každoročně naroste o 2% . . Určete, za jak dlouho se zdvojnásobí. [35 let]
12. Paní Nová ukládá počátkem každého roku 10 000,- Kč. Určete, jakou částku bude mít za deset let při úrokové míře 5%, je-li daň z úroků 15% . [126 624]
13. Určitý druh baktérií se rozmnožuje tak, že každá bakterie se za půl hodiny rozdělí na dvě. Kolik bakterií vznikne za 12 hodin? [16 777 215]